Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 5(32), 2005

УДК 519.2

Инвариантность стационарного распределения состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания

А. Н. Старовойтов

1. Введение. При исследовании сетей массового обслуживания важную роль играет проблема инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональному виду распределения длительностей обслуживания заявок в узлах. Это связано с тем, что в реальных сетях распределение продолжительности обслуживания обычно отличается от показательного. В работах [1–4] исследовались сети, в которых приборы могут частично выходить из строя, работая при этом в "щадящем" режиме. Однако в указанных работах предполагалось, что длительности обслуживания заявок и длительности пребывания прибора узла в режимах имеют показательное распределение. В настоящей работе рассматриваются аналогичные сети, в которых продолжительности обслуживания и длительности пребывания прибора узла в режимах имеют произвольный закон распределения, доказывается, что в этом случае стационарное распределение сохраняет свой вид.

2. Постановка задачи. Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов. Поступающий в нее поток заявок — простейший с параметром λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью π_{0l} направляется в l-й узел ($l = \overline{1,N}; \sum_{l=1}^{N} \pi_{0l} = 1$). Заявка, обслуженная в l-м узле, мгновенно с вероятностью π_{lk} направляется в k-й узел, а с вероятностью π_{l0} покидает сеть ($l = \overline{1,N}; \sum_{k=0}^{N} \pi_{lk} = 1$). В l-м узле находится единственный прибор, который может работать в r_l+1 режимах. Состояние l-го узла характеризуется парой чисел $x_l = (i_l, j_l)$, где i_l — число заявок в l-м узле, j_l — номер режима, в котором работает прибор в l-м узле ($l = \overline{1,N}; j_l = \overline{0,r_l}$).

Назовем 0 основным режимом работы. Время пребывания в основном режиме работы имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(0,t)$, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояния x_l, у которого $1 \le j_l \le r_l - 1$, время пребывания в режиме j_l также имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(j_l,t)$, при этом с вероятностью $\nu_l(j_l)/(\nu_l(j_l) + \varphi_l(j_l))$ прибор l-го узла переходит в режим j_l+1, а с вероятностью $\varphi_l(j_l)/(\nu_l(j_l) + \varphi_l(j_l))$ – в режим $j_l - 1$. Время пребывания в последнем r_l-м режиме имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l,t)$, после чего прибор переходит в (r_l-1)-й режим. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок в узле не меняется. При этом

$$\nu_l^{-1}(0) = \int_0^\infty (1 - \Phi_l(0,t))dt,$$

$$(\nu_l(j_l) + \varphi_l(j_l))^{-1} = \int_0^\infty (1 - \Phi_l(j_l,t))dt, \quad 1 \le j_l \le r_l - 1, \tag{1}$$

$$\varphi_l^{-1}(r_l) = \int_0^\infty (1 - \Phi_l(r_l,t))dt.$$

Дисциплина обслуживания заявок в узлах имеет следующую специфику. Заявка, поступающая в некоторый узел, обладает абсолютным приоритетом по отношению ко всем остальным заявкам, находящимся в узле. Вытесненная с прибора заявка вклинивается в начало очереди, сдвигая стоящие в ней заявки, причем при повторном поступлении на прибор заявка продолжает дообслуживаться оставшееся время в режиме, в котором работал прибор на момент указанного поступления.

Длительности обслуживания заявок в узлах не зависят от процесса поступления, друг от друга и от длительностей пребывания в режимах и имеют произвольную функцию распределения $B_l(i_l, t)$ для l-го узла, зависящую от числа заявок i_l в узле, причем

$$\mu_l^{-1}(i_l) = \int_0^\infty (1 - B_l(i_l, t))dt, \tag{2}$$

т.е. $\mu_l(i_l)$ — скорость обслуживания l-м узлом, когда в нем находится i_l заявок.

Будем предполагать, что матрица (π_{lk}), где $l, k = \overline{0, N}$, неприводима ($\pi_{00} = 0$). Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_l = \pi_{0l} + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \pi_{kl}, \quad l = \overline{1, N} \tag{3}$$

имеет единственное положительное решение (ε_l, $l = \overline{1, N}$).

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$, где $x_l(t) = (i_l(t), j_l(t))$ — состояние l-го узла в момент времени t. В соответствии с вышесказанным, здесь $i_l(t)$ — число заявок в l-м узле в момент времени t, $j_l(t)$ — номер режима работы l-го узла в момент времени t.

Цель работы — доказать инвариантность стационарного распределения $x(t)$ по отношению к виду распределений длительностей обслуживания и к виду распределений времен пребывания в режимах при фиксированных математических ожиданиях.

3. Марковский случай. Пусть длительности обслуживания заявок в узлах и длительности пребывания в режимах имеют показательное распределение, т.е. для l-го узла $B_l(i_l, t) = 1 - exp\{-\mu_l(i_l)t\}$ $(t > 0)$ и $\Phi_l(j_l, t) = 1 - exp\{-(\nu_l(j_l) + \varphi_l(j_l))t\}$ $(t > 0)$. Тогда $x(t)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным фазовым пространством $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, где $X_l = \{(i_l, j_l) | i_l = 0, 1, \ldots ; j_l = \overline{0, r_l}\}$.

В работе [1] установлено, что при выполнении условия

$$\sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^{N} \left((\lambda \varepsilon_l)^{i_l} \prod_{k=1}^{j_l} \nu_l(k-1) \varphi_l^{-1}(k) \prod_{s=1}^{i_l} \mu_l^{-1}(s) \right) < \infty \tag{4}$$

процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \ldots p_N(x_N).$$

При этом

$$p_l(i_l, j_l) = \left((\lambda \varepsilon_l)^{i_l} \prod_{k=1}^{j_l} \nu_l(k-1) \varphi_l^{-1}(k) \prod_{s=1}^{i_l} \mu_l^{-1}(s) \right) p_l(0, 0),$$

где $q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^{N} \left(\mu_l(i_l) + \nu_l(j_l) + \varphi_l(j_l)\right)$, а ($\varepsilon_l$, $l = \overline{1, N}$) — положительное решение уравнения трафика (3). Хотя в [1] не конкретизировалась дисциплина обслуживания заявок в узлах, вышеприведенные результаты будут справедливы для дисциплины с абсолютным приоритетом для поступающей в узел заявки и дообслуживанием вытесненной с прибора заявки, что следует из свойств отсутствия последействия у показательного распределения.

4. Немарковский случай. Пусть теперь длительность обслуживания заявки прибором l-го узла имеет произвольную функцию распределения $B_l(i_l, t)$, а время пребывания прибором l-го узла в режиме j_l — $\Phi_l(j_l, t)$, причем математические ожидания фиксированы с помощью равенств (1), (2). Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема. *Процесс $x(t)$ эргодичен, если выполнено условие (4), при этом финальное стационарное распределение имеет вид*

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)\dots p_N(x_N),$$

где

$$p_l(i_l, j_l) = \Big((\lambda\varepsilon_l)^{i_l}\prod_{k=1}^{j_l}\nu_l(k-1)\varphi_l^{-1}(k)\prod_{s=1}^{i_l}\mu_l^{-1}(s)\Big)p_l(0,0),$$

ε_l находятся из (3), а

$$p_l(0,0) = \Big(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r_l}(\lambda\varepsilon_l)^{i_l}\prod_{k=1}^{j_l}\nu_l(k-1)\varphi_l^{-1}(k)\prod_{s=1}^{i_l}\mu_l^{-1}(s)\Big)^{-1}, \quad l = \overline{1, N}.$$

Abstract. The open queueing networks with Poisson enter, Markov routing are considered. The service time has a wanton distribution. Single server nodes can operate in any regimes, switch time on some regime to another also has a wanton distribution. Switch occurs only between the neighbouring regimes.

Литература

1. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, *Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания*, Весцi НАН Беларусi, № 3 (2001), 129–134.

2. Ю. В. Малинковский, А. А. Гаврилюк, *Инвариантное распределение открытых экспоненциальных сетей массового обслуживания с зависящими от состояния сети многорежимными стратегиями обслуживания*, Известия ГГУ им. Ф. Скорины, № 4(25) (2004), 124–128.

3. А. Ю. Нуеман, *Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками*, Вестник ТГУ, № 1(1) (2002), 90–93.

4. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, *Инвариантная мера марковского сетевого процесса с многорежимными стратегиями*, Известия ГГУ им. Ф. Скорины, № 6(15) (2002), 183-188.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 23.06.05