Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **1**, 2006

УДК 517+530.1

О распространении трехмерных солитонов в средах с керровской нелинейностью

С. В. Жестков*, А. А. Романенко**

Известно [1], что (3+1)-мерное нелинейное скалярное уравнение Шредингера, которое описывает распространение волн в нелинейных изотропных однородных средах, имеет вид

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{k_0''}{2k_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+N\left(|\psi|^2\right)\psi=0\,, \quad (1)$$

где $\xi=k_0 z,\ \tau=t-k_0' z,\ N(I)-$ функция отклика. В случае керровской нелинейности имеем

$$N(I)=qI,\quad q>0\,.$$

Для случая $k_0''<0$, который соответствует отрицательной дисперсии, с помощью стандартной замены уравнение (1) преобразуется к виду

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+q|\psi|^2\psi=0\,. \quad (2)$$

Переходя к полярным координатам ρ,φ на плоскости x,y и считая, что функция ψ не зависит от полярного угла φ, из (2) получим

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+q|\psi|^2\psi=0\,.$$

Рассмотрим вопрос о распространении солитонов в оптическом ответвителе с керровской нелинейностью и двумя сердцевинами, т.е. рассмотрим следующую общую систему нелинейных уравнений вида

$$i\frac{\partial u_n}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial\tau^2}+\sum_{j,m=1}^{2}q_{jm}^{(n)}\left|u_j\right|^2u_m+\sum_{i=1}^{2}K_i^{(n)}u_i=0,\quad n=1,2\,, \quad (3)$$

где коэффициенты $q_{jm}^{(n)}-$ описывают нелинейное взаимодействие, а коэффициенты $K_i^{(n)}$ описывают линейную связь между сердцевинами. Вопрос о существовании трехмерных солитонов системы (3) является открытым (см.[1-3]).

Для его решения будем строить солитоны в виде

$$u_n(\rho,\tau,\xi)=U_n(r)\exp(ik\xi),\quad k>0,\quad r=\sqrt{\rho^2+\tau^2},\quad n=1,2\,. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$U_n''(r)+\frac{2}{r}U_n'(r)=kU_n(r)-\sum_{j,m=1}^{2}q_{jm}^{(n)}U_j^2(r)U_m(r)-\sum_{i=1}^{2}K_i^{(n)}U_i(r),\quad n=1,2\,. \quad (5)$$

Кроме того, для искомых солитонов должны выполняться условия

$$U_n(+\infty)=0,\quad U_n'(+\infty)=0,\quad n=1,2\,. \quad (6)$$

Строгое доказательство существования решения задачи (5),(6) неизвестно [1-3], поэтому в качестве асимптотики на бесконечности предлагается взять решение следующей краевой задачи:

$$U_n''(r) = kU_n(r) - \sum_{j,m=1}^{2} q_{jm}^{(n)} U_j^2(r) U_m(r) - \sum_{i=1}^{2} K_i^{(n)} U_i(r),$$
$$U_n(+\infty) = 0, \quad U_n'(+\infty) = 0, \quad n = 1, 2. \tag{7}$$

Эти функции имеют вид

$$U_n(r) = A_n \exp\left(\frac{1}{2}\lambda r\right)(1+\exp(\lambda r))^{-1} \quad A_n > 0, \quad n = 1, 2, \tag{8}$$

если выполняются следующие дисперсионные соотношения:

$$Q(\mu) = q_{11}^{(2)}\mu^4 + \mu^3\left(q_{12}^{(2)} - q_{11}^{(1)}\right) + \mu^2\left(q_{21}^{(2)} - q_{12}^{(1)}\right) + \mu\left(q_{22}^{(2)} - q_{21}^{(1)}\right) - q_{22}^{(1)} = 0,$$
$$A_2^2 = 2\lambda^2\left(q_{11}^{(2)}\mu^3 + q_{12}^{(2)}\mu^2 + q_{21}^{(2)}\mu + q_{22}^{(2)}\right)^{-1}, \tag{9}$$
$$K_1^{(1)} + K_2^{(1)}\mu^{-1} = K_1^{(2)}\mu + K_2^{(2)}, \quad \lambda^2 = 4\left(k - K_1^{(2)}\mu - K_2^{(2)}\right), \quad \mu \equiv A_1/A_2.$$

Из (9) следует, что решение задачи (7) определяется корнями характеристического уравнения $Q(\mu) = 0$.

Пусть r_* точка из $[0,+\infty)$ такая, что при $r \geq r_*$ можно использовать асимптотическое представление (8). Тогда решение системы (5) можно гладким образом продолжить до точки $r = 0$, начиная с решения следующей задачи Коши:

$$U_n''(r) + \frac{2}{r}U_n'(r) = kU_n(r) - \sum_{j,m=1}^{2} q_{jm}^{(n)} U_j^2(r) U_m(r) - \sum_{i=1}^{2} K_i^{(n)} U_i(r),$$
$$U_n(r_*) = a_n, \quad U_n'(r_*) = b_n, \quad n = 1, 2, \tag{10}$$

где a_n, b_n – значения асимптотических функций и их производных в точке r_*. Система (10) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$U_n(r) = a_n + b_n r_*^2\left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r}\right) + \int_{r_*}^{r} s\left(kU_n(s) - \sum_{j,m=1}^{2} q_{jm}^{(n)} U_j^2(s) U_m(s) - \sum_{i=1}^{2} K_i^{(n)} U_i(s)\right)ds -$$
$$-\frac{1}{r}\int_{r_*}^{r} s^2\left(kU_n(s) - \sum_{j,m=1}^{2} q_{jm}^{(n)} U_j^2(s) U_m(s) - \sum_{i=1}^{2} K_i^{(n)} U_i(s)\right)ds, \qquad n = 1, 2.$$

Применяя к ней принцип сжимающих отображений [4], получим локальную теорему об однозначной разрешимости задачи Коши (10), которая формулируется следующим образом.

Пусть выполнены условия

$$a_{11} < 1, \quad a_{11} + a_{22} + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} < 1,$$

где

$$a_{11} = I(r)\left[\left|p_1^{(1)}\right| + 3\left|q_{11}^{(1)}\right|R_1^2 + 2\left|q_{12}^{(1)}\right|R_1R_2 + \left|q_{21}^{(1)}\right|R_2^2\right],$$
$$a_{12} = I(r)\left[\left|q_{12}^{(1)}\right|R_1^2 + 2\left|q_{21}^{(1)}\right|R_1R_2 + 3\left|q_{22}^{(1)}\right|R_2^2 + \left|K_2^{(1)}\right|\right],$$
$$a_{21} = I(r)\left[3\left|q_{11}^{(2)}\right|R_1^2 + 2\left|q_{12}^{(2)}\right|R_1R_2 + \left|q_{21}^{(2)}\right|R_2^2 + \left|K_1^{(2)}\right|\right],$$
$$a_{22} = I(r)\left[\left|p_2^{(2)}\right| + \left|q_{12}^{(2)}\right|R_1^2 + 2\left|q_{21}^{(2)}\right|R_1R_2 + 3\left|q_{22}^{(2)}\right|R_2^2\right],$$
$$I(r) \equiv \frac{1}{2}\left|r^2 - r_*^2\right| + \frac{1}{3r}\left|r^3 - r_*^3\right|, \quad p_1^{(1)} \equiv k - K_1^{(1)}, \quad p_2^{(2)} \equiv k - K_2^{(2)},$$

$$|a_1| + \left|b_1 r_*^2\left(\frac{1}{r_*}-\frac{1}{r}\right)\right| + I(r)\Big[\left|p_1^{(1)}\right|R_1 + \left|K_2^{(1)}\right|R_2 + \left|q_{11}^{(1)}\right|R_1^3 + \left|q_{12}^{(1)}\right|R_1^2R_2\Big] + ,$$
$$+\left|q_{21}^{(1)}\right|R_1R_2^2 + \left|q_{22}^{(1)}\right|R_2^3 \le R_1,$$
$$|a_2| + \left|b_2 r_*^2\left(\frac{1}{r_*}-\frac{1}{r}\right)\right| + I(r)\Big[\left|p_2^{(2)}\right|R_2 + \left|K_1^{(2)}\right|R_1 + \left|q_{11}^{(2)}\right|R_1^3 + \left|q_{12}^{(2)}\right|R_1^2R_2\Big] +$$
$$+\left|q_{21}^{(2)}\right|R_1R_2^2 + \left|q_{22}^{(2)}\right|R_2^3 \le R_2.$$

Тогда в области $|r-r_*|\le\delta,\ 0\le U_1\le R_1,\ 0\le U_2\le R_2$, *где* $\delta-$ *достаточно малое число, а* R_1 R_2 *конечные числа, задача Коши (10) имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений или численно.*

Продолжая этот процесс за конечное число шагов можно численно построить решение системы (10) на отрезке $[0, r_*]$, причем в точке $r=0$ должны выполняться условия $U_n'(0)=0,\ n=1,2$. Соответствующая система интегральных уравнений в окрестности точки $r=0$ принимает вид

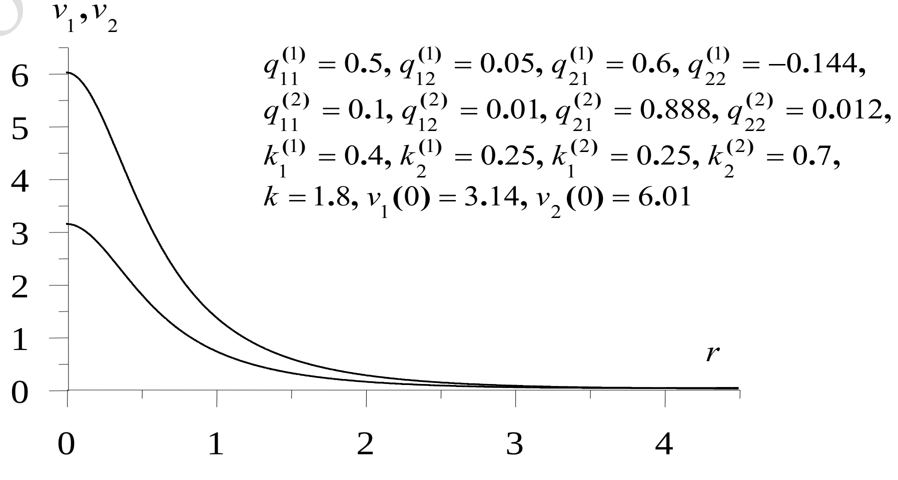
$$U_n(r) = U_n(0) + \int_0^r s\left(kU_n(s) - \sum_{j,m=1}^{2} q_{jm}^{(n)}U_j^2(s)U_m(s) - \sum_{i=1}^{2}K_i^{(n)}U_i(s)\right)ds -$$
$$-\frac{1}{r}\int_0^r s^2\left(kU_n(s) - \sum_{j,m=1}^{2} q_{jm}^{(n)}U_j^2(s)U_m(s) - \sum_{i=1}^{2}K_i^{(n)}U_i(s)\right)ds,\quad n=1,2, \tag{11}$$

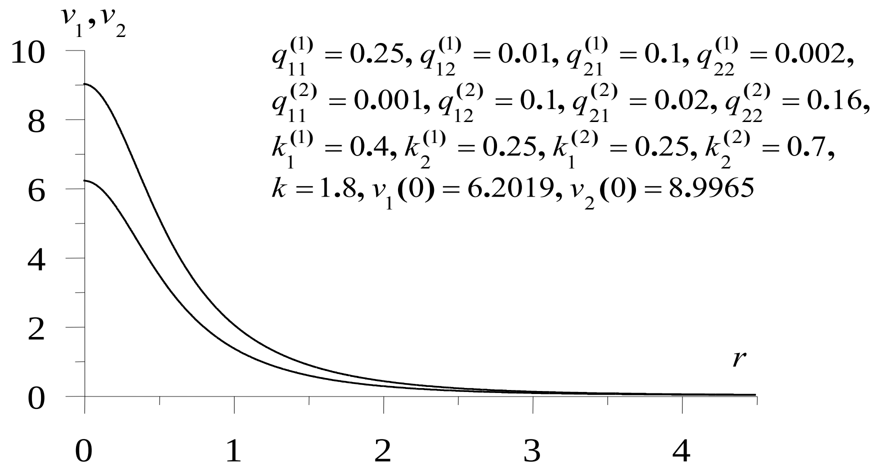
где $U_n(0)-$ неизвестные амплитуды солитонов. Значения $U_n(0)$ подбираются таким образом, чтобы графики осесимметричных солитонов на отрезке $[0, r_*]$ гладким образом переходили в графики асимптотических функций (8).

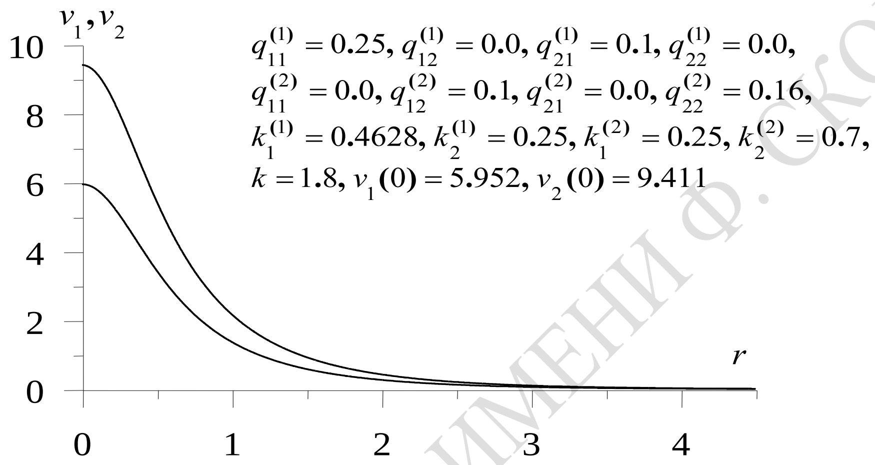
Обозначим $U_n(0)=A_n,\ n=1,2$. Тогда в окрестности точки $r=0$ из (11) получим

$$U_n(r)\approx A_n + \frac{1}{6}r^2\left(kA_n - \sum_{j,m=1}^{2} q_{jm}^{(n)}A_j^2A_n - \sum_{i=1}^{2}K_i^{(n)}A_i\right),\quad n=1,2.$$

На рисунке представлены результаты моделирования огибающих солитонов для различных значений параметров. Они согласуются с частными случаями работ [1, 2].







Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Грант №Ф05-325).

Abstract. In this paper the numerically-analytic method of construction of three-dimensional solitons for system of coupled nonlinear Schrodinger equations is developed. The results of numerical simulation of solitons are presented.

Литература

1. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, Солитоны, М.: Физматлит, 2003. 304с.

2. Ю. С. Кившарь, Г.П. Агравал, Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов, М.: Физматлит, 2005. 648с.

3. С. В. Жестков, Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных, Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. 220с.

4. Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, М.: Наука, 1967. 472 с.

*Институт технологии металлов НАН Беларуси,
212030 г. Могилев, Беларусь,
e-mail: zhestkov_s@rambler.ru

**УО Белорусско-Российский университет,
212030 г. Могилев, пр. Мира, 43,
e-mail: intehmet@mogilev.unibel.by