Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(37), 2006

УДК 517.5

Упрощение модели сложного процесса на основе алгебраических многочленов Якоби

Г. Н. Казимиров

Обозначим через $f(t)$ исследуемый процесс, где t – время. Будем полагать, что модель процесса $f(t)$ известна, но является сложной для исследования, либо не удовлетворяет нас по каким-то причинам. Требуется подобрать другую, более простую функцию вместо $f(t)$, достаточно близкую к исходной.

В настоящей работе рассматриваются функции f из достаточно широкого класса и для них подбираются более простые функции P_n (алгебраические многочлены степени не выше чем n-1), близкие в некотором смысле к исходным, и даётся оценка порядка близости f к P_n.

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\|_p = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1 \le x \le 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \| f(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \|_p$

Обозначим через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше, чем n-1, в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$, т.е. $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf\limits_{P_n \in P} \| P_n(x) - f(x) \|_{p,\alpha,\beta}$,

где P – множество алгебраических многочленов степени не выше, чем n-1, n=1,2,….

Для $\nu > \mu > (-1/2)$ определим оператор обобщённого сдвига Якоби

$$T_h(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 f(x\cosh + yz\sinh\sqrt{1-x^2} - (1-y^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2})(1-y^2)^{\nu-\mu-1} y^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-(1/2)} dzdy,$$

где $\gamma(\nu,\mu) = \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 (1-y^2)^{\nu-\mu-1} y^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-(1/2)} dzdy.$

Введём обозначения ($r = 2,3,\dots$):

$$\Delta_h^1(f,x,\nu,\mu) = T_h(f,x,\nu,\mu) - f(x),\ \ \Delta^r_{h_1,\dots,h_r}(f,x,\nu,\mu) = \Delta^1_{h_r}(\Delta^{r-1}_{h_1,\dots,h_{r-1}}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu),$$

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|h_i| \le \delta, i=1,\dots,r} \left\| \Delta^r_{h_1,\dots,h_r}(f,x,\mu) \right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Теорема 1. Пусть даны числа p, ν, μ, r такие, что $1 \le p \le \infty, \nu > \mu > -(1/2), r = 1,2,3,\dots$. Пусть числа α и β выбраны по правилу: $\nu - \mu > \alpha - \beta \ge 0$ и $-\frac{1}{2} < \beta < \mu$ при p=1, $\nu - \mu > \alpha - \beta > 0$ и $-\frac{1}{2p} < \beta < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ при 1<p<∞, $\nu - \mu > \alpha - \beta \ge 0$ и $0 \le \beta < \mu + \frac{1}{2}$ при p=∞. Тогда для $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ справедливы неравенства:

$$C_1 E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le \tilde{\omega}_r(f, \frac{1}{n}, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} \le \frac{C_2}{n^{2r}} \sum_{m=1}^{n} m^{2r-1} E_m(f)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n (n=1, 2, 3,…).

Теорема 1 доказана в работе [2].

Будем обозначать: $D_{x,\nu,\mu} = (1-x)^{-\nu}(1+x)^{\mu} \frac{d}{dx}(1-x)^{\nu+1}(1+x)^{\mu+1}\frac{d}{dx}$, $D^0_{x,\nu,\mu} = I$, где I-тождественный оператор, $D^1_{x,\nu,\mu} = D_{x,\nu,\mu}$ и для k=2,3,… $D^k_{x,\nu,\mu} = D^1_{x,\nu,\mu}(D^{k-1}_{x,\nu,\mu})$. Через $AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций g, что g имеет абсолютно непрерывную на каждом [a,b]⊂(-1,1) 2r-1 производную и $(1-x^2)^r \frac{d^{2r}}{dx^{2r}} g(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$.

Цель работы – доказать следующую теорему

Теорема 2. Пусть даны числа p, ν, μ, r такие, что $1 \le p \le \infty, \nu > \mu > -(1/2), r = 1,2,3,\dots$. Пусть числа α и β выбраны по правилу: $\nu - \mu > \alpha - \beta \ge 0$ и $-\frac{1}{2} < \beta < \mu$ при p=1, $\nu - \mu > \alpha - \beta > 0$ и $-\frac{1}{2p} < \beta < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ при 1<p<∞, $\nu - \mu > \alpha - \beta \ge 0$ и $0 \le \beta < \mu + \frac{1}{2}$ при p=∞.

Тогда для функции $f \in AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$ справедливо неравенство

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le \frac{C_5}{n^{2r}} \tilde{\omega}_k(D^r_{x,\nu,\mu} f, \frac{1}{n}, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительная постоянная C_5 не зависит от f и n (n=1,2,3,…).

Доказательству теоремы предпошлём несколько лемм.

Лемма 1. Пусть даны числа $p, \nu,, \mu$ такие, что $1 \le p \le \infty, \nu > \mu > -(1/2),$. Пусть числа α и β выбраны по правилу: $\nu - \mu > \alpha - \beta \ge 0$ и $-\frac{1}{2} < \beta < \mu$ при p=1, $\nu - \mu > \alpha - \beta > 0$ и $-\frac{1}{2p} < \beta < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ при 1<p<∞, $\nu - \mu > \alpha - \beta \ge 0$ и $0 \le \beta < \mu + \frac{1}{2}$ при p=∞. Тогда если $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, то и $T_t(f, x, \nu, \mu) \in L_{p,\alpha,\beta}$ и $\| T_t(f,x,\nu,\mu) \|_{p,\alpha,\beta} \le C_6 \|f\|_{p,\alpha,\beta}$, где положительная постоянная C_6 не зависит от f и t.

Лемма 1 доказана в [3].

Для $0 < h \le \frac{\pi}{2}$ рассмотрим оператор

$$L_h(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{\varphi(h)} \int_0^h (\sin\frac{\omega}{2})^{-2\nu-1}(\cos\frac{\omega}{2})^{-2\mu-1} \int_0^{\omega} (\sin\frac{u}{2})^{2\nu+1}(\cos\frac{u}{2})^{2\mu+1} T_u(f,x,\nu,\mu)\,du\,d\omega,$$

где $\varphi(h)=\int\limits_0^h(\sin\frac{\omega}{2})^{-2\nu-1}(\cos\frac{\omega}{2})^{-2\mu-1}\int\limits_0^\omega(\sin\frac{\omega}{2})^{2\nu+1}(\cos\frac{\omega}{2})^{2\mu+1}dud\omega$

Пусть $L_h^1(f,x,\nu,\mu)=L_h(f,x,\nu,\mu)$, а для k=2,3,…

$$L^l_{h_1,\dots,h_l}(f,x,\nu,\mu)=L_{h_l}(L^{l-1}_{h_1,\dots,h_{l-1}}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu).$$

Лемма 2. Пусть даны числа p,ν,μ,l такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>\mu>-(1/2), l=1,2,3,\dots$. Пусть числа α и β выбраны по правилу: $\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0$ и $-\frac{1}{2}<\beta<\mu$ при p=1, $\nu-\mu>\alpha-\beta>0$ и $-\frac{1}{2p}<\beta<\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}$ при 1<p<∞, $\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0$ и $0\le\beta<\mu+\frac{1}{2}$ при p=∞. Тогда, если $f\in L_{p,\alpha,\beta}$, то при любых $h_1,\dots,h_l\in(0,\frac{\pi}{2}]$ $L^l_{h_1,\dots,h_l}(f,x,\nu,\mu)\in AD^l(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$ и справедливо равенство:

$$D^l_{x,\nu,\mu}L^l_{h_1,\dots,h_l}(f,x,\nu,\mu)=\frac{1}{\varphi(h_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(h_l)}\Delta^l_{h_1,\dots,h_l}(f,x,\nu,\mu).$$

Лемма 2 доказывается почти дословным повторением леммы 11 из [2], стр.30.

Лемма 3. Пусть даны числа p,ν,μ такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>\mu>-(1/2)$. Пусть числа α и β выбраны по правилу: α≤ν и $\beta\le\mu$ при p=1, $\alpha<\nu+1-(1/p)$ $\beta<\mu+1-(1/p)$ при 1<p≤∞. Тогда если $f\in L_{p,\alpha,\beta}$ то $f\in L_{1,\nu,\mu}$.

Лемма 3 доказана в [2], стр.21.

Лемма 4. Пусть $g\in AD^k(\nu,\mu)_{1,\nu,\mu}, \nu>\mu>-(1/2)$. Тогда для почти всех $x\in[-1,1]$ и всех $t_1,\dots,t_l\in R, k=1,2,3,\dots; l=1,2,3,\dots$ справедливо равенство:

$$D^k_{x,\nu,\mu}T^l_{t_1,\dots,t_l}(g,x,\nu,\mu)=T^l_{t_1,\dots,t_l}(D^k_{x,\nu,\mu}g,x,\nu,\mu)$$

Лемма 4 доказана в [4], стр.26.

Доказательство теоремы 3: Из определения k-й обобщённой разности, теоремы Лебега о предельном переходе, леммы 2, леммы 3 и леммы 4 имеем

$$\Delta^{r+k}_{h_1,\dots,h_{r+k}}(f,x,\nu,\mu)=\Delta^r_{h_{k+1},\dots,h_{r+k}}(\Delta^r_{h_1,\dots,h_k}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu)=$$
$$=\varphi(h_{k+1})\cdot\ldots\cdot\varphi(h_{k+r})D^r_{x,\nu,\mu}L^r_{h_{k+1},\dots,h_{r+k}}(\Delta^k_{h_1,\dots,h_k}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu)=$$
$$=\varphi(h_{k+1})\cdot\ldots\cdot\varphi(h_{k+r})L^r_{h_{k+1},\dots,h_{r+k}}(\Delta^k_{h_1,\dots,h_k}(D^r_{x,\nu,\mu}f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu).$$

Используя обобщённое неравенство Минковского, Лемму 1 и очевидное неравенство: $|\varphi(h)|\le C_6h^2$ при $0<h\le\frac{\pi}{2}$, где C_6 не зависит от h, имеем, что

$$\left\|\Delta^{r+k}_{h_1,\dots,h_{r+k}}(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\le C_7h^2_{k+1}\cdot\ldots\cdot h^2_{r+k}\left\|\Delta^k_{h_1,\dots,h_k}(D^r_{x,\nu,\mu}f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}$$

Из определения k-го обобщённого модуля гладкости получаем, что

$$\tilde\omega_{r+k}(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\le C_8\delta^{2r}\tilde\omega_k(D^r_{x,\nu,\mu}f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$$

По теореме 1

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_9 \tilde{\omega}_{r+k}(f, \frac{1}{n}, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} \le \frac{C_{10}}{n^{2r}} \tilde{\omega}_k (D^r_{x,\nu,\mu} f, \frac{1}{n}, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta}$$

Теорема 2 доказана.

Abstract. The paper considers composite functions characterized by the value of the k-th generalized modulus of smoothness determined with the help of Jacobi generalized shift operator and the simplification of complicated process model on the base of algebraic polynomials.

Литература

1. В. П. Кузнецов, Экономико-математические методы и модели, Конспект лекций, Минск, МИУ, 2000.

2. Г. Н. Казимиров, О теоремах Джексона для *к*-го обобщённого модуля гладкости, Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, 3054-В94.

3. М. К. Потапов, О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения, Труды МИАН СССР, **134** (1975), 260–277.

4. Г. Н. Казимиров, Приближение алгебраическими многочленами функций с данным *k*-м обобщённым модулем гладкости, Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, Москва, 1995.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.05.06