Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Конечные группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами

В.С.Монахов, В.В.Подгорная

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Квазинормальной называют подгруппу H группы G, которая перестановочна со всеми подгруппами из G. С этим понятием связаны многие результаты теории групп, см. [1–2]. Имеются различные обобщения квазинормальности, см., например, [3, 4]. Так, обобщением квазинормальности является следующее понятие.

Подгруппа H группы G называется полунормальной в G, если существует такая подгруппа K из G, что $HK = G$ и HK_1 — собственная подгруппа группы G для каждой подгруппы K_1 из K, отличной от K. Отдельные свойства полунормальных подгрупп рассматривались в [5,6]. В частности, в [6] установлена сверхразрешимость группы, в которой все силовские подгруппы полунормальны.

В настоящей заметке рассматриваются группы, у которых каждая нециклическая силовская подгруппа полунормальна. Отметим, что такая группа не всегда будет сверхразрешимой. Примером служит несверхразрешимая группа перестановок S_4, у которой силовская 2-подгруппа полунормальна, а силовская 3-подгруппа циклическая.

Нам потребуются следующие определения и обозначения.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначают дополнение к π во множестве всех простых чисел.

(π', π)-рядом π-разрешимой группы G называется ряд

$$1 = P_0(G) \leqslant N_0(G) \leqslant P_1(G) \leqslant N_1(G) \leqslant \dots,$$

где

$$N_i(G)/P_i(G) = O_{\pi'}(G/P_i(G)),\ P_{i+1}(G)/N_i(G) = O_\pi(G/N_i(G)),\ i = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $O_{\pi'}(X)$ и $O_\pi(X)$ — наибольшие нормальные π'- и π-подгруппы группы X соответственно.

Ясно, что если группа G π–разрешима, то $N_k(G) = G$ для некоторого натурального k. Наименьшее натуральное число k с этим свойством называют π-длиной π-разрешимой группы G и обозначают через $l_\pi(G)$. При $\pi = \{p\}$ определение π-длины π-разрешимой группы G совпадает с определением p–длины p–разрешимой группы G.

Лемма 1. *Пусть G — π–разрешимая группа и k — натуральное число. Если каждый отличный от G эпиморфный образ группы G имеет π-длину, не превышающую k, а $l_\pi(G) > k$, то:*

(1) $\Phi(G) = 1$;

(2) максимальная π–нильпотентная нормальная подгруппа $F_\pi(G) = P_1(G)$ является элементарной абелевой p–подгруппой для некоторого $p \in \pi$;

(3) $F_\pi(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G;

(4) $F_\pi(G)$ обладает дополнением в группе G;

(5) $C_G(F_\pi(G)) = F_\pi(G)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы VI.6.9 из [7].

Лемма 2 (теорема IV.2.8 из [7]). *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G. Если силовская p–подгруппа в группе G циклическая, то в группе G существует нормальное p–дополнение.*

Лемма 3 (теорема 2 из [6]). *Пусть p — наибольший простой делитель порядка группы G и P — ее силовская p-подгруппа. Если P полунормальна в G, то P — нормальная подгруппа группы G.*

Лемма 4 (теорема IV.2.11 из [7]). *Если все силовские подгруппы группы G циклические, то коммутант G' является циклической холловой подгруппой и факторгруппа G/G' циклическая.*

Лемма 5. *Пусть G — π-разрешимая группа с циклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi \subseteq \pi(G)$. Тогда $l_\pi(G) \leq 1$.*

Доказательство. Пусть группа G — контрпример наименьшего порядка, для которого условие леммы верно, но $l_\pi(G) > 1$. Тогда по лемме 1 можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$ и в группе G подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ — минимальная нормальная p-подгруппа для $p \in \pi$. Ясно, что $F \lhd G_\pi = [H]K$, где $H = G'_\pi$ — коммутант холловой подгруппы G_π, H и K — холловы циклические подгруппы группы G_π по лемме 4. Так как $C_G(F) = F$, то $H = F$ и F является циклической силовской подгруппой группы G. Поэтому группа всех её автоморфизмов $Aut\ F$ абелева. Так как факторгруппа $N_G(F)/C_G(F) = G/F$ изоморфно вкладывается в $Aut\ F$, то факторгруппа G/F абелева. Следовательно, холлова подгруппа G_π/F нормальна в G/F. Отсюда следует, что G_π нормальна в группе G и $l_\pi(G) \leq 1$. Лемма доказана.

В доказательстве следующих двух результатов использовалась классификация конечных простых групп.

Лемма 6 (см. [8]). *Если для любого простого нечетного делителя p порядка группы G существуют бипримарные $\{2,p\}$–холловы подгруппы, то группа G разрешима.*

Лемма 7 (см. [9]). *Пусть G — группа и H — её полунормальная подгруппа. Тогда:*

(1) если H — 2–нильпотентна, то нормальное замыкание H^G подгруппы H в группе G разрешимо;

(2) если порядок подгруппы H нечетен, то подгруппа H^G имеет нечетный порядок.

Лемма 8. *Если в группе G силовская p–подгруппа полунормальна, то G p–разрешима и $q > p$ для любого $q \in \pi(G : N_G(P))$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая: $p > 2$ и $p = 2$. Пусть $p > 2$. По лемме 6 получаем, что $|P^G|$ нечетен, где P — силовская p–подгруппа группы G. Следовательно, подгруппа P^G разрешима по теореме Томпсона-Фейта. Теперь G/P^G — p'-группа и группа G p–разрешима. Пусть r — произвольное простое число из $\pi(G)$, $r < p$. По теореме D5 [10] в группе G существует $\{p,r\}$-холлова подгруппа PR, где R — некоторая силовская r-подгруппа группы G. По лемме 3 $R \subseteq N_G(P)$ и $q > p$ для любого $q \in \pi(G : N_G(P))$.

Пусть $p = 2$. Из определения полунормальной подгруппы следует, что существует подгруппа H такая, что $G = PH$ и $PH_1 < G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H. Отсюда следует, что в группе G существуют $\{2,q\}$–холловы подгруппы для каждого $q \in \pi(G) \backslash \{2\}$, и группа G разрешима по лемме 6. Лемма доказана.

Теорема. *Если в группе G каждая нециклическая силовская подгруппа полунормальна, то G разрешима и $l_p(G) \leq 2$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Доказательство. Вначале установим разрешимость группы. Пусть группа G — контрпример наименьшего порядка, для которого условие теоремы верно, но неверно её заключение. Легко проверить следующие свойства: если подгруппа X полунормальна в группе G и $N \lhd G$, то XN/N полунормальна в G/N; если X полунормальна в G и $X \leqslant Y \leqslant G$, то X полунормальна в Y. Простые делители порядка группы G обозначим следующим образом:

$$\pi(G) = \{q, p_1, \ldots, p_k, p \mid q < p_1 < p_2 < \ldots < p_k < p\}.$$

Если силовская q-подгруппа циклическая, то найдётся по лемме 2 подгруппа $G_{q'}$, нормальная в группе G. По индукции подгруппа $G_{q'}$ разрешима. Если силовская p-подгруппа полунормальна, то силовская подгруппа G_p будет нормальна в группе G по лемме 3 и факторгруппа G/G_p будет разрешимой по индукции. В этих двух случаях получается, что группа G разрешима. Поэтому следует считать, что подгруппа G_p циклическая, а подгруппа G_q полунормальная.

Из полунормальности силовской q-подгруппы G_q следует, что $G = G_qH$ и $G_qH_1 < < G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H. Поэтому из леммы 8 вытекает q-разрешимость группы G, а так как q — наименьший делитель порядка группы G, то группа G разрешима.

Итак, разрешимость группы G установлена.

Рассмотрим множество простых чисел $\pi = \{r \in \pi(G) \mid G_r$ — нециклическая силовская подгруппа группы $G\}$. Тогда $G = G_\pi G_{\pi'}$, где в $G_{\pi'}$ содержатся все циклические силовские подгруппы группы G. Холлова подгруппа G_π сверхразрешима по следствию 6 [6], а холлова подгруппа $G_{\pi'}$ сверхразрешима по лемме 4. По теореме VI.6.6 [7] $l_q(G) \leq 1$ для всех $q \in \pi'$. По лемме 5 $l_{\pi'}(G) \leq 1$, поэтому в группе G существует нормальный ряд $1 \leq A \leq B \leq G$ такой, что подгруппа A и факторгруппа G/B являются π-группами, а факторгруппа B/A — π'-группа. Так как группы A и G/B сверхразрешимы, то $l_p(A) \leq 1$ и $l_p(G/B) \leq 1$ для всех $p \in \pi$. Отсюда следует, что $l_p(G) \leq 2$. Теорема доказана.

В симметрической группе перестановок S_4 силовская 2-подгруппа полунормальна, а силовская 3-подгруппа циклическая. Поэтому оценка p-длины в теореме относительно полунормальной силовской подгруппы является точной.

Abstract. If every noncyclic Sylow subgroup of a finite group G is semi-normal, then G is solvable and $l_p(G) \leq 2$ for any $p \in \pi(G)$.

Литература

1. Л.А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

2. М. Судзуки, *Строение группы и строение структуры её подгруппы*, Москва, ИЛ, 1960.

3. J.C. Beidleman, D.J.S.Robinson, *On finite groups satisfying the permutizer condition*, J.Algebra, **191** (1997), 686–703.

4. O. Kegel, *Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen*, Math.Z. **78** (1962), 205–221.

5. Su Xiongying, *On semi-normal subgroups of finite group*, J.Math. (Wuhan), **8** (1) (1988), 5–9.

6. В.В.Подгорная, *Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп*, Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук, № 4 (2000), 22–25.

7. B.Huppert, *Endliche Gruppen, I*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1967.

8. В.Н.Тютянов, *К гипотезе Холла*, Известия Гомельского госуниверситета, № 13 (2002), 151–154.

9. A.Carocca, H. Matos, *Some solvability criteria for finite groups*, Hokkaido Mathematical Journal, **26** (1997), 157–161.

10. P.Hall, *Theorems like Sylow's*, Proc. London Mat. Soc. **6**, № 3 (1956), 286–304.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 15.10.04