Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **1**, 2006

УДК

Гравитационное взаимодействие в электродинамике

А. Н. Сердюков

Хорошо известна тривиальная особенность принципа наименьшего действия, заключающаяся в том, что уравнения движения не изменяются при умножении функции Лагранжа всех физических систем на одинаковую положительную постоянную [1,2]. Таким образом, в физике реализуется симметрия уравнений движения относительно своеобразного глобального калибровочного преобразования – масштабного преобразования функции Лагранжа

$$L \to \tilde{L} = LU^2 \tag{1}$$

при постоянном $U \neq 0$. Следуя принципу локальной калибровочной инвариантности, от подобного глобального преобразования можно перейти к локальному, сделав U зависящим от четырехмерных координат x_μ. Такой переход означает введение калибровочного скалярного поля $U(x_\mu)$. Универсальность взаимодействия этого поля со всеми видами материи, обеспечиваемая его мультипликативным подключением к функции Лагранжа любой физической системы, дает основание рассматривать $U(x_\mu)$ как потенциальную функцию гравитационного поля. При этом важно отметить, что сама эта функция, наследуя присущую лагранжиану неоднозначность, оказывается определенной с точностью до постоянного множителя. Тем не менее, данное обстоятельство не должно отражаться на теоретических результатах для величин, имеющих реальный физический смысл. Это значит, что преобразование полевой функции

$$U(x_\mu) \to U'(x_\mu) = \Omega \cdot U(x_\mu) \tag{2}$$

с произвольной константой Ω следует рассматривать в качестве калибровочного преобразования, так что поля $U(x_\mu)$ и $U'(x_\mu)$ в физическом отношении следует рассматривать как тождественные.

Такой подход однозначным образом приводит к новой полевой модели скалярного гравитационного поля, которая реализуется в рамках СТО [3]. Эта модель позволяет описать гравитационное взаимодействие в электродинамике. Развитие теории двух связанных полей – гравитационного и электромагнитного, будем осуществлять с использованием вариационного принципа. В качестве «правил отбора», отсеивающих неприемлемые варианты теоретических моделей, примем принципы специальной теории относительности и калибровочной инвариантности. Разумеется, при этом следует иметь в виду, что включение взаимодействия между полями может привести к необходимости модификации калибровочных преобразований потенциалов, установленных для свободных полей.

Руководствуясь принципом простоты, постулируем следующий лагранжиан для системы связанных гравитационного и электромагнитного полей и взаимодействующих с ними массивных электрически заряжённых частиц:

$$\Lambda = -\frac{c^4}{2\pi G}\left(\partial_\mu U\right)^2 - \frac{1}{16\pi}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 U^{-2} - \mu c^2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\,U^2 + \frac{1}{c}A_\mu j_\mu . \tag{3}$$

Здесь

$$\mu(\mathbf{r},t) = \sum_a m_a \sqrt{1-\upsilon_a^2/c^2}\,\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)\right)$$

представляет плотность массы частиц; четырехмерный вектор плотности тока $\left(j_\mu\right) = \left(\mathbf{j},\ ic\rho\right)$ образован плотностью электрического заряда $\rho(\mathbf{r},t) = \sum_a e_a \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)$ и плотностью тока $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ движущихся частиц; четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля $\left(A_\mu\right) = \left(\mathbf{A}, i\varphi\right)$ составляют трехмерные потенциалы – векторный $\mathbf{A}$ и скалярный φ.

Чтобы калибровочное преобразование гравитационного поля не изменяло уравнений движения частиц и полевых уравнений, очевидно электродинамический потенциал должен подвергаться калибровочному преобразованию

$$A_\nu(x_\mu) \to A'_\nu(x_\mu) = \Omega^2 \cdot A_\nu(x_\mu) \tag{4}$$

одновременно с калибровочным преобразованием (2) гравитационного потенциала *U*.

Построим уравнение движения заряженной частицы, взаимодействующей с двумя полями – электромагнитным и гравитационным. Интегрируя два последних члена лагранжиана (3) по трехмерному пространству, находим функцию Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\,U^2 + \frac{e}{c}\mathbf{vA} - e\varphi \tag{5}$$

для частицы с массой *m* и зарядом *e*. Из уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

после элементарных преобразований имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mU^2\mathbf{v}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right) = mU^2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\,\mathbf{g} + e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,. \tag{6}$$

Здесь *напряженность поля* тяготения **g** выражается через логарифмический градиент потенциала *U*:

$$\mathbf{g} = -2c^2\nabla \ln U\,, \tag{7}$$

а компоненты **E** и **B** *тензора электромагнитного поля*

$$(B_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c:c} -\mathbf{B}\times & -i\mathbf{E} \\ \hdashline i\mathbf{E} & 0 \end{array}\right). \tag{8}$$

обычным образом представляются через электродинамический потенциал

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,. \tag{9}$$

Уравнение (6) явно содержит гравитационный потенциал *U*, что создает неудобства при отыскании решений этого уравнения для $\mathbf{r}(t)$. Однако калибровочная инвариантность теории позволяет упростить данное уравнение, исключив из него *U*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right) = e\mathbf{D} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H} + \frac{m}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\left(\mathbf{g} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{v}\times\mathbf{g} - \frac{1}{c}\mathbf{v}\eta\right) \tag{10}$$

где

$$\mathbf{D} = U^{-2}\mathbf{E},\quad \mathbf{H} = U^{-2}\mathbf{B},\quad \eta = 2c\frac{\partial}{\partial t}\ln U\,. \tag{10}$$

Введя второй тензор электромагнитного поля

$$(H_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c:c} -\mathbf{H}\times & -\mathrm{i}\,\mathbf{D} \\ \hdashline \mathrm{i}\,\mathbf{D} & 0 \end{array}\right), \tag{11}$$

соотношениям (10) можно придать четырехмерную форму

$$H_{\mu\nu} = U^{-2}B_{\mu\nu}, \tag{12}$$

Силовые характеристики гравитационного поля в (10) **g** и η образуют 4-вектор

$$(g_\mu) = \left(2c^2\partial_\mu \ln U\right) = (\mathbf{g},\ i\eta).$$

Соотношение (9) обеспечивает тождественное выполнение первой пары уравнений Максвелла

$$\partial_\sigma B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\sigma} + \partial_\nu B_{\sigma\mu} = 0\,. \tag{13}$$

Соотношения (9.1.18), (9.1.19), как известно, определяют **A** и φ через **E** и **B** неоднозначно. Калибровочное преобразование электродинамического потенциала

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f\,, \tag{14}$$

осуществляемое с помощью некоторой произвольной скалярной функции координат и времени

f, не меняет значений наблюдаемых **E** и **B**. Разумеется, при этом и уравнения Максвелла остаются калибровочно-инвариантными, не изменяясь при таком преобразовании потенциалов.

Используя вариационный принцип, построим далее уравнения электромагнитного поля, возмущенного полем тяготения. Соответствующее уравнение Эйлера – Лагранжа, получающееся при варьировании потенциала A_μ,

$$\partial_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = \frac{\partial \Lambda}{\partial A_\nu} \tag{15}$$

и будет искомым электродинамическим полевым уравнением. Таким образом, с учетом (12) окончательно находим:

$$\partial_\mu H_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{\mathrm{c}}\,\mathrm{j}_\nu\,. \tag{16}$$

Уравнения (16) и (13) составляет систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля, взаимодействующего с полем тяготения.

Как видим, пространство, заполненное особой материальной средой – гравитационным полем, в электродинамическом отношении аналогично среде, электромагнитные свойства которой описываются соотношениями (9.3.4), (9.3.5). Эти соотношения имеют форму обычных материальных уравнений неоднородной и нестационарной изотропной среды

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{17}$$

со скалярными параметрами диэлектрической и магнитной проницаемостей $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ и $\mu(\mathbf{r}, t)$, которые выражаются через гравитационный потенциал U:

$$\varepsilon = U^{-2}, \qquad \mu = U^2. \tag{18}$$

Построим теперь уравнения гравитационного поля, включив в источник гравитации наряду с весомой материей также электромагнитное поле. Из соотношения (5), определяющего потенциал U через напряженность g_μ, следует линейное однородное уравнение

$$\partial_\mu g_\nu - \partial_\nu g_\mu = 0\,. \tag{19}$$

Таким модифицированным скалярным уравнением будет уравнение Эйлера – Лагранжа (4.3.7)

$$\partial_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu U)} = \frac{\partial \Lambda}{\partial U}\,, \tag{20}$$

если в качестве лагранжиана Λ принять выражение (3).

$$\left\{\Box - \frac{2\pi G}{c^2}\left(\mu\sqrt{1-\upsilon^2/\mathrm{c}^2} - \frac{1}{16\pi\,\mathrm{c}^2}H_{\mu\nu}^2\right)\right\}U = 0\,. \tag{21}$$

От калибровочно-инвариантного уравнения (21) можно перейти к уравнению для напряжённости, исключив гравитационный потенциал:

$$\partial_\mu g_\mu = \frac{1}{2\mathrm{c}^2}\,\mathrm{g}_\mu^2 + \frac{\mathrm{G}}{4\mathrm{c}^2}H_{\mu\nu}^2 - 4\pi\,\mathrm{G}\,\mu\sqrt{1-\upsilon^2/\mathrm{c}^2}\,. \tag{22}$$

Совместно с тензорным уравнением (3.1.5)

$$\partial_\mu\,\mathrm{g}_\nu - \partial_\nu\,\mathrm{g}_\mu = 0 \tag{23}$$

уравнение (22) составляет систему ковариантных уравнений гравитационного поля, порождаемого электромагнитным полем $H_{\mu\nu}$ и движущейся весомой материей с массой, распределённой в пространстве с плотностью μ.

Суммируя результаты, представим в трехмерных обозначениях полную систему связанных уравнений для полей и частиц:
уравнения электромагнитного поля

$$\nabla\times\mathbf{D} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\mathbf{g}\times\mathbf{D} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\eta\mathbf{H}\,,$$

$$\nabla\mathbf{H} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\mathbf{gH} = 0\,,$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\sum_a e_a\,\mathbf{v}_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a),$$

$$\nabla\mathbf{D}=4\pi\sum_a e_a\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a);$$

уравнения гравитационного поля

$$\nabla\times\mathbf{g}=0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}=-\nabla\eta,$$

$$\nabla\mathbf{g}+\frac{1}{c}\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{1}{2c^2}\left(\mathbf{g}^2-\eta^2\right)=$$

$$=-\frac{G}{2c^2}\left(\mathbf{D}^2-\mathbf{H}^2\right)-4\pi G\sum_a m_a\sqrt{1-\upsilon_a^2/c^2}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a);$$

уравнение движения заряженных массивных частиц в электромагнитном и гравитационном полях

$$\frac{d}{dt}\frac{m_a\,\mathbf{v}_a}{\sqrt{1-\upsilon_a^2/c^2}}=e_a\,\mathbf{D}+\frac{e_a}{c}\mathbf{v}_a\times\mathbf{H}+$$

$$+\frac{m_a}{\sqrt{1-\upsilon_a^2/c^2}}\left(\mathbf{g}+\frac{1}{c^2}\mathbf{v}_a\times\mathbf{v}_a\times\mathbf{g}-\frac{1}{c}\mathbf{v}_a\eta\right).$$

Abstract.

Литература

1. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. – М.: Физматгиз, 1958. – С. 294.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М.: Наука, 1965. – С. 12 – 13, 16 – 17.
3. Сердюков А. Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2005. – 257 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.09.06