Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(37), 2006

УДК 512.542

Новое доказательство теоремы о конечных абелевых группах

О. М. Адарченко

В настоящей заметке мы даем новое доказательство следующей хорошо известной теоремы.

Теорема. *Каждая конечная абелева группа является прямым произведением примарных циклических подгрупп.*

Доказательство этой теоремы, предложенное в работе [1], основывалось на том факте, что конечная абелева группа с единственной подгруппой простого порядка является циклической. В нашем подходе используется предложенная С. А. Чунихиным [2] идея изучения группы, у которой все собственные подгруппы принадлежат некоторому фиксированному классу групп.

Напомним, что примарная группа — это группа, порядок которой есть степень простого числа.

Лемма 1. *Конечная абелева группа с единственной максимальной подгруппой является циклической.*

Доказательство. Пусть G — неединичная конечная абелева группа с единственной максимальной подгруппой M. Если $x \in G \setminus M$, то $\langle x \rangle = G$. □

Лемма 2 (Коши). *Пусть порядок конечной абелевой группы G делится на простое число p. Тогда G имеет подгруппу порядка p.*

Доказательство. Для циклических групп лемма верна. Пусть G — нециклическая группа. Тогда, по лемме 1, она имеет две различные максимальные подгруппы A и B. Так как $G = AB$, то остается применить индукцию и формулу $|G| = |A| \cdot |B| : |A \cap B|$. □

Лемма 3. *Конечная абелева группа G, у которой все максимальные подгруппы циклические, либо сама является циклической, либо $G = A \times B$, где $|A| = |B| = p$ — простое число.*

Доказательство. Если группа G не примарна, то для любого простого делителя p ее порядка множество G_p всех p-элементов из G является, ввиду леммы 2, неединичной подгруппой и содержится в одной из циклических максимальных подгрупп. В этом случае G является прямым произведением циклических подгрупп попарно взаимно простых порядков и потому сама является циклической. Ввиду леммы 1, для групп порядка p^2 лемма также верна. Пусть теперь G — нециклическая p-группа порядка p^α, где $\alpha > 2$. По лемме 1, G имеет различные максимальные подгруппы $A = \langle a \rangle$ и $B = \langle b \rangle$. Пусть P — подгруппа порядка p из A. Так как $G = AB$, то ясно, что $A \cap B \supseteq P$. Значит, P содержится во всех максимальных подгруппах и потому G/P нециклическая и по индукции имеет порядок p^2. Элементы a^p и b^p содержатся в P и, значит, $a^p = b^{pm}$, $0 < m < p$. Так как $B = \langle b \rangle = \langle b^m \rangle$, то мы можем считать, что $m = 1$. Получаем $(ab^{-1})^p = 1$, что равносильно $ab^{-1} \in P$. Но тогда G/P оказывается циклической группой с порождающм элементом $aP = bP$. Противоречие. □

Лемма 4. *Пусть A — циклическая p-подгруппа наибольшего порядка в конечной абелевой группе G. Тогда $G = A \times B$ для некоторой подгруппы B.*

Доказательство. Для циклических групп теорема очевидна (в этом случае роль B выполняет подгруппа, составленная из элементов, порядки которых не делятся на

p). Будем считать, что p делит $|G|$, G нециклическая и $|G| \neq p^2$. Пусть P — подгруппа порядка p из A. По лемме 3, G имеет нециклическую максимальную подгруппу M. Для M и ее циклических подгрупп лемма верна. Поэтому ясно, что в M имеется подгруппа Q простого порядка такая, что $P \neq Q$. Заметим, что AQ/Q — циклическая p-подгруппа наибольшего порядка в G/Q. По индукции,

$$G/Q = AQ/Q \times B/Q.$$

Отсюда следует, что $G = AB$ и $A \cap B \subseteq Q$. Но $A \cap Q = 1$. Поэтому $G = A \times B$. □

Доказательство теоремы. Пусть p — простой делитель порядка конечной абелевой группы G. И пусть A — циклическая p-подгруппа наибольшего порядка в G. По лемме 2, $|A| \neq 1$. По лемме 4, $G = A \times B$ для некоторой подгруппы B. Для B теорема верна по индукции. Но тогда теорема верна и для G. □

Abstract. The author gives a new proof of the fundamental theorem on finite abelian groups.

Литература

1. G. Navarro, On the fundamental theorem of finite abelian groups. Am. Math. Mon., **110**, No 2 (2003), 153–154.

2. С. А. Чунихин, О специальных группах. Матем. сборник, **36**, № 2 (1929), 135–137.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.04.06