Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгруппах конечных групп

В.С.Монахов

Если G — неединичная конечная разрешимая группа, то подгруппа Фраттини является собственной подгруппой в подгруппе Фиттинга группы G, см. [1], III.4.5. Поэтому существуют максимальные подгруппы в группе G, которые не содержат подгруппу Фиттинга. В [2] автором доказано, что *в конечной разрешимой неединичной группе G подгруппа Фраттини совпадает с пересечением максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга.*

В [3] Гашюц установил, что *пересечение $\Delta(G)$ максимальных ненормальных подгрупп ненильпотентной конечной группы G нильпотентно и $\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$*, см. также [1], с.276. Здесь $\Phi(X)$ — подгруппа Фраттини группы X, а $Z(X)$ — центр группы X. В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема. *Пусть G — конечная разрешимая ненильпотентная группа. Тогда подгруппа $\Delta(G)$ совпадает с пересечением максимальных ненормальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга.*

Доказательство. Обозначим через $\Delta_{\overline{F}}(G)$ пересечение всех ненормальных максимальных подгрупп группы G, не содержащих $F(G)$, а через $\Delta_F(G)$ пересечение ненормальных максимальных подгрупп группы G, содержащих $F(G)$. Ясно, что подгруппы $\Delta_{\overline{F}}(G)$ и $\Delta_F(G)$ характеристические в группе G и $\Delta(G) = \Delta_F(G) \cap \Delta_{\overline{F}}(G)$. В факторгруппе $G/\Phi(G)$ подгруппа Фиттинга $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ (см. [1], глава III.4). Ясно, что $\Delta(G/\Phi(G)) = \Delta(G)/\Phi(G)$, поэтому $\Delta_{\overline{F}}(G/\Phi(G)) = \Delta_{\overline{F}}(G)/\Phi(G)$. Теперь можно считать, что $\Phi(G) = 1$. По теореме Гашюца $\Delta(G) = Z(G)$.

Предположим, что $\Delta_{\overline{F}}(G)/\Delta(G) \neq 1$ и пусть $K/\Phi(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Delta(G)$, содержащаяся в $\Delta_{\overline{F}}(G)/\Delta(G)$. Так как подгруппа K нормальна в группе G и факторгруппа $K/\Delta(G)$ нильпотентна, то подгруппа K нильпотентна по теореме III.2.5 из [1] и $K \subseteq F(G)$. Но теперь $K \subseteq \Delta_F(G) \cap \Delta_{\overline{F}}(G) = \Delta(G)$, противоречие. Поэтому допущение неверно и $\Delta_{\overline{F}}(G)/\Delta(G) = E$, т.е. $\Delta_{\overline{F}}(G) = \Delta(G)$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф03-110).

Abstract. Let G be a finite soluble group. It is proved that the intersection of all maximal non-normal subgroups of G coincides with the intersection of all maximal non-normal subgroups not containing $F(G)$.

Литература

1. B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Berlin–Heidelberg– New York, 1967.

2. В. С. Монахов, *Замечания о максимальных подгруппах конечных групп*, Доклады НАН Беларуси, bf 47, №4 (2003), 31–33.

3. W. Gaschütz, *Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen*, Math. Z. **58** 1953, 160-170.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 12.11.03