

УДК 512.542

## К теории критических частично насыщенных формаций

И.Н.САФОНОВА

В работе используются определения и обозначения, принятые в [1–4]. Рассматриваются только конечные группы.

Приведем для удобства читателя некоторые определения работы [4]. Символом  $G_{\omega d}$  обозначается наибольшая нормальная в  $G$  подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является  $\omega d$ -группой (если таких подгрупп в  $G$  нет, то полагают  $G_{\omega d} = 1$ ). Функция вида  $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации}\}$  называется  $\omega$ -локальным спутником. Через  $LF_{\omega}(f)$  обозначается класс всех таких групп  $G$ , что  $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$  и  $G/F_p(G) \in f(p)$  для любого  $p \in \omega \cap \pi(G)$ . Если формация  $\mathfrak{F}$  такова, что  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ , то говорят, что  $\mathfrak{F}$  —  $\omega$ -насыщенная формация, а  $f$  — её  $\omega$ -локальный спутник.

В дальнейшем через  $\pi$  будем обозначать некоторое непустое множество простых чисел.

В вопросах классификации насыщенных формаций важную роль играют так называемые минимальные насыщенные не  $\mathfrak{H}$ -формации [5] (или иначе  $\mathfrak{H}_l$ -критические формации [6]), т.е. такие насыщенные формации  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , все собственные насыщенные подформации которых содержатся в классе группы  $\mathfrak{H}$ .

Проблема изучения такого рода формаций впервые была поставлена Л.А.Шеметковым в его докладе на VI симпозиуме по теории групп [5]. Решению этой задачи посвящен цикл работ А.Н.Скибы 1980–1993 г.г. Основной результат в этом направлении достигнут в работе [7], где описаны минимальные насыщенные не  $\mathfrak{H}$ -формации для случая, когда  $\mathfrak{H}$  — произвольная формация классического типа (формация  $\mathfrak{F}$  называется формацией классического типа, если она имеет такой локальный экран, все неабелевы значения которого — насыщенные формации).

Вопросу классификации минимальных  $\omega$ -насыщенных не  $\mathfrak{H}$ -формаций посвящены работы [8] – [14]. В [12] автором данной работы была доказана следующая теорема, охватывающая все отмеченные выше результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{H}$  — некоторая формация классического типа и  $h$  — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\omega$ -насыщенной не  $\mathfrak{H}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = l^{\omega} \text{form} G$ , где  $G$  — такая монолитическая группа с цоколем  $P = G^{\omega}$ , что либо  $\tau = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$ , либо  $\tau \neq \emptyset$  и выполняется одно из следующих условий:

- (1)  $G = P$  — группа простого порядка;
- (2)  $P$  — неабелева группа и  $P = G^{h(p)}$  для любого  $p \in \tau$ ;
- (3)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с цоколем  $Q = H^{h(p)}$ , что  $p \notin \pi(Q)$  и либо  $\Phi(H) = 1$  и  $H^{h(q)} \subseteq Q$  для любого  $q \in \pi(Q)$ , либо  $H$  — минимальная не  $h(p)$ -группа одного из следующих типов:
  - а) циклическая примарная группа;
  - б) группа кватернионов порядка 8;
  - в) неабелева группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q$ .

Работа [14] автора посвящена приложению данного результата при описании минимальных  $\omega$ -насыщенных не  $\mathfrak{H}$ -формаций, в случае когда  $\mathfrak{H}$  — одна из следующих формаций: формация всех  $\pi$ -разрешимых, либо всех  $\pi$ -нильпотентных, либо всех  $\pi$ -сверхразрешимых групп.

В данной работе теорема 1 будет использована при нахождении описания минимальных  $\omega$ -насыщенных не  $\pi$ -замкнутых, а также не  $\pi$ -специальных формаций.

В качестве вспомогательного результата нам понадобится следующая

**Лемма 1** [2, с.75]. Пусть  $f_1$  — локальный экран формации  $\mathfrak{F}$ ,  $h$  — внутренний локальный экран формации  $\mathfrak{H}$ . Тогда формация  $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$  имеет такой локальный экран  $f$ , что

$$f(p) = \begin{cases} f_1(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}) \\ h(p), & \text{если } p \in \pi'(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

### §1. Минимальные $\omega$ -насыщенные не $\pi$ -замкнутые формации

Напомним, что группа называется  $\pi$ -замкнутой, если она имеет нормальную холлову  $\pi$ -подгруппу. Формация всех  $\pi$ -замкнутых групп, очевидно, совпадает с произведением  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{\pi'}$ .

**Теорема 1.1.** Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  — минимальная  $\omega$ -насыщенная не  $\pi$ -замкнутая формация, когда  $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form} G$ , где  $G$  — такая монолитическая группа с цоколем  $P$ , что  $\pi(P) \cap \pi' \neq \emptyset$ ,  $P$  —  $\pi$ -замкнутый корадикал группы  $G$  и либо  $\tau = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$ , либо  $\tau \neq \emptyset$  и выполняется одно из следующих условий:

1)  $P$  — неабелева группа, причем если  $\tau \cap \pi' \neq \emptyset$ , то  $P$  совпадает с  $\mathfrak{G}_{\pi'}$ -корадикалом группы  $G$ ;

2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с цоколем  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ , что  $\Phi(H) = 1$ ,  $p \notin \pi(Q)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{H}$  — формация всех  $\pi$ -замкнутых групп,  $h$  — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда поскольку  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{\pi'}$ , то ввиду леммы 1  $h(p) = \mathfrak{H}$  для всякого простого числа  $p \in \pi$  и  $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$  для всякого простого числа  $p \in \pi'$ .

*Необходимость.* Обозначим через  $\mathfrak{F}$  минимальную  $\omega$ -локальную не  $\pi$ -замкнутую формацию. Ввиду теоремы 1  $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form} G$ , где  $G$  — такая монолитическая группа с цоколем  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что либо  $\tau = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$ , либо  $\tau \neq \emptyset$  и выполняется одно из следующих условий:

(1)  $P$  — неабелева группа и  $P = G^{h(p)}$  для любого  $p \in \tau$ ;

(2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с цоколем  $Q = H^{h(p)}$ , что  $p \notin \pi(Q)$  и либо  $\Phi(H) = 1$  и  $H^{h(q)} \subseteq Q$  для любого  $q \in \pi(Q)$ , либо  $H$  — минимальная не  $h(p)$ -группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q$ .

Поскольку  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{\pi'}$ , то  $\pi(P) \cap \pi' \neq \emptyset$ . Таким образом, если  $\tau = \emptyset$ , то группа  $G$  удовлетворяет условию теоремы. Пусть  $\tau \neq \emptyset$  и для группы  $G$  выполняется условие (1). Допустим, что  $\tau \cap \pi' \neq \emptyset$  и  $p \in \tau \cap \pi'$ . Тогда поскольку  $P = G^{h(p)}$ , то  $G/P \in h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ . Таким образом, группа  $G$  удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь для группы  $G$  выполняется условие (2). Тогда  $p \in \pi'$ . Значит,  $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ . Ввиду того, что  $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$  — насыщенная формация и  $H/Q \in h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ , заключаем, что  $\Phi(H) = 1$ . Таким образом,  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$  и группа  $G$  удовлетворяет условию 2) теоремы.

*Достаточность.* Пусть  $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form} G$ , где  $G$  — группа из условия теоремы. Используя теорему 1 покажем, что формация  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\omega$ -насыщенной не  $\pi$ -замкнутой формацией.

При  $\tau = \emptyset$ , очевидно, группа  $G$  удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Пусть  $\tau \neq \emptyset$  и для группы  $G$  выполнено условие 1). Тогда поскольку  $h(p) = \mathfrak{S}$  для всех  $p \in \pi$  и  $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$  для всех  $p \in \pi'$ , то при  $\tau \cap \pi' \neq \emptyset$  имеем  $G/P \in \mathfrak{G}_{\pi'} = h(p)$ , где  $p \in \pi'$ , т.е.  $P = G^{h(p)}$  для всякого  $p \in \tau \cap \pi'$ . Кроме того, поскольку по условию группа  $G/P$   $\pi$ -замкнута и  $\pi(P) \cap \pi' \neq \emptyset$ , то  $P = G^{\mathfrak{S}}$ . Значит,  $P = G^{h(p)}$  при всех  $p \in \tau \cap \pi$ . Следовательно, группа  $G$  удовлетворяет требованиям условия (1) теоремы 1. Поэтому  $\mathfrak{F} = l^{\omega} \text{form} G$  является минимальной  $\omega$ -насыщенной не  $\pi$ -замкнутой формацией.

Пусть теперь группа  $G$  из условия 2). Покажем, что  $Q = H^{h(p)}$  и  $H^{h(q)} \subseteq Q$  для любого  $q \in \pi(Q)$ . Действительно, по условию  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ . Но так как  $p \in \pi'$  и  $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$  имеем  $Q = H^{h(p)}$ . Кроме того, так как  $\mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq h(q)$  для любого  $q \in \pi(Q)$ , то  $H^{h(q)} \subseteq Q$ . Таким образом, группа  $G$  удовлетворяет условию (2) теоремы 1. Значит,  $\mathfrak{F} = l^{\omega} \text{form} G$  — минимальная  $\omega$ -насыщенная не  $\pi$ -замкнутая формация. Теорема доказана.

В частности, при  $\omega = \{p\}$  из доказанной теоремы получаем

**Следствие 1.1.** *Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  — минимальная  $p$ -насыщенная не  $\pi$ -замкнутая формация, когда  $\mathfrak{F} = l^p \text{form} G$ , где  $G$  — такая монолитическая группа с цоколем  $P$ , что  $\pi(P) \cap \pi' \neq \emptyset$ ,  $P$  —  $\pi$ -замкнутый корадикал группы  $G$ , при этом если  $p \in \pi(P)$ , то выполняется одно из следующих условий:*

- 1)  $P$  — неабелева группа, при  $p \in \pi'$  совпадающая с  $\mathfrak{G}_{\pi'}$ -корадикалом группы  $G$ ;
- 2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с цоколем  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ , что  $\Phi(H) = 1$ ,  $p \notin \pi(Q)$ .

В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$  — множество всех простых чисел из теоремы 1.1 вытекает

**Следствие 1.2** (А.Н.Скиба [2, с.181]). *Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  — минимальная насыщенная не  $\pi$ -замкнутая формация, когда  $\mathfrak{F} = l \text{form} G$ , где  $G$  — такая монолитическая группа с цоколем  $P$ , что  $\pi(P) \cap \pi' \neq \emptyset$ , группа  $G/P$   $\pi$ -замкнута и выполняется одно из следующих условий:*

- 1)  $P = G^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$  — неабелева группа;
- 2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с цоколем  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ , что  $\Phi(H) = 1$ ,  $(|P|, |Q|) = 1$ .

**Следствие 1.3.** *Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  — минимальная  $\omega$ -насыщенная не  $p$ -замкнутая формация, когда  $\mathfrak{F} = l^{\omega} \text{form} G$ , где  $G$  — такая монолитическая группа с цоколем  $P$ , что  $P$  совпадает с  $p$ -замкнутым корадикалом группы  $G$  и выполняется одно из следующих условий:*

- 1)  $P$  — неабелева  $\omega d$ -группа, причем если  $\pi(P) \cap \omega \neq \{p\}$ , то  $P$  совпадает с  $\mathfrak{G}_{p'}$ -корадикалом группы  $G$ ;
- 2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $q$ -группа,  $q \in \omega$  ( $q \neq p$ ),  $H = [Q]N$ , где  $Q = C_H(Q)$  — минимальная нормальная  $p$ -подгруппа группы  $H$ ,  $N \in \mathfrak{G}_{p'}$ ;
- 3)  $P$  —  $\omega'$ -группа.

## §2. Минимальные $\omega$ -насыщенные не $\pi$ -специальные формации

Группа называется  $\pi$ -специальной, если она обладает нильпотентной нормальной холловой  $\pi$ -подгруппой. Класс всех  $\pi$ -специальных групп, очевидно, совпадает с классом  $\mathfrak{N}_{\pi} \mathfrak{G}_{\pi'}$ .

**Теорема 2.1.** *Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  — минимальная  $\omega$ -насыщенная не  $\pi$ -специальная формация, когда  $\mathfrak{F} = l^{\omega} \text{form} G$ , где  $G$  — такая не  $\pi$ -специальная монолитическая группа с цоколем  $P$ , что группа  $G/P$   $\pi$ -специальна и либо  $\tau = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$ , либо  $\tau \neq \emptyset$  и выполняется одно из следующих условий:*

- 1)  $P$  — неабелева группа, причем если  $\tau = \{p\} \subseteq \pi$ , то  $P = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{\pi'}}$ , в противном случае  $P = G^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ ;

2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с абелевым цоколем  $Q$ , что  $p \notin \pi(Q)$  и  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{H}$  — формация всех  $\pi$ -специальных групп,  $h$  — ее максимальный внутренний локальный экран. Поскольку  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{G}_{\pi'}$ , то ввиду леммы 1 имеем  $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{\pi'}$  для всех  $p \in \pi$  и  $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$  для всех  $p \in \pi'$ .

*Необходимость.* Пусть  $\mathfrak{F}$  — минимальная  $\omega$ -насыщенная не  $\pi$ -специальная формация. Ввиду теоремы 1  $\mathfrak{F} = l^{\omega}\text{form}G$ , где  $G$  — такая монолитическая группа с цоколем  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что либо  $\tau = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$ , либо  $\tau \neq \emptyset$  и выполняется одно из следующих условий:

(1)  $P$  — неабелева группа и  $P = G^{h(p)}$  для любого  $p \in \tau$ ;  
 (2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с цоколем  $Q = H^{h(p)}$ , что  $p \notin \pi(Q)$  и либо  $\Phi(H) = 1$  и  $H^{h(q)} \subseteq Q$  для любого  $q \in \pi(Q)$ , либо  $H$  — минимальная не  $h(p)$ -группа одного из следующих типов:

- циклическая примарная группа;
- группа кватернионов порядка 8;
- неабелева группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q$ .

Понятно, что если  $\tau = \emptyset$ , то группа  $G$  удовлетворяет условиям теоремы. Пусть  $\tau \neq \emptyset$  и для группы  $G$  выполняется условие (1). Тогда если  $\tau = \{p\}$  и  $p \in \pi$ , то  $G/P \in h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{\pi'}$ . Если же  $p \in \pi'$ , то  $G/P \in h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ . Пусть теперь  $|\tau| \geq 2$ . Допустим, что  $\pi' \cap \tau \neq \emptyset$  и  $q \in \pi' \cap \tau$ . Тогда так как  $P = G^{h(q)}$  и  $h(q) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ , получаем, что  $P = G^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ . Если же  $\pi' \cap \tau = \emptyset$ , то найдется, по меньшей мере, два различных простых числа  $p$  и  $q$  из  $\pi \cap \tau$ . Тогда

$$G/P \in h(p) \cap h(q) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{\pi'} \cap \mathfrak{N}_q\mathfrak{G}_{\pi'} = (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q)\mathfrak{G}_{\pi'} = \mathfrak{G}_{\pi'}.$$

Таким образом, группа  $G$  удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь для группы  $G$  выполняется условие (2). Предположим, что  $p \in \pi'$ . Тогда поскольку  $Q = H^{h(p)}$ , то  $H/Q \in h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ , т.е. группа  $G$  удовлетворяет условию 2) теоремы. Пусть  $p \in \pi$ . Допустим, что  $Q$  — неабелева группа или абелева  $\pi'$ -группа. Тогда поскольку  $H \in \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{G}_{\pi'}$ , то  $H \in \mathfrak{G}_{\pi'}$ . Так как при этом  $P$  — абелев цоколь, то  $G$  —  $\pi$ -специальная группа. Противоречие. Следовательно,  $Q$  — абелева  $q$ -группа,  $q \in \pi$ . Но тогда

$$H/Q \in h(p) \cap h(q) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{\pi'} \cap \mathfrak{N}_q\mathfrak{G}_{\pi'} = (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q)\mathfrak{G}_{\pi'} = \mathfrak{G}_{\pi'}.$$

Таким образом, группа  $G$  удовлетворяет условию 2) теоремы.

*Достаточность.* Пусть  $\mathfrak{F} = l^{\omega}\text{form}G$ , где  $G$  — группа из условия теоремы. Очевидно, что при  $\tau = \emptyset$  формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет теореме 1.

Пусть  $\tau \neq \emptyset$  и для группы  $G$  выполнено условие 1). Покажем, что  $P = G^{h(p)}$  для любого  $p \in \tau$ . Пусть  $\tau = \{p\} \subseteq \pi$ . Тогда так как  $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{\pi'}$ , то  $P = G^{h(p)}$ . Если же  $\tau = \{p\} \subseteq \pi'$ , то  $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$  и снова  $P = G^{h(p)}$ . Пусть теперь  $|\tau| > 1$  и  $s, q \in \tau$ . Тогда поскольку по условию  $G/P \in \mathfrak{G}_{\pi'}$ ,  $G$  не является  $\pi$ -специальной группой и  $\mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq h(s) \cap h(q)$ , то  $P = G^{h(p)}$  для любого  $p \in \tau$ . Значит, группа  $G$  удовлетворяет условию (1) теоремы 1. Поэтому формация  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\omega$ -насыщенной не  $\pi$ -специальной формацией.

Пусть теперь группа  $G$  удовлетворяет условию 2). Покажем, что  $Q = H^{h(p)}$  и  $H^{h(q)} \subseteq Q$  для любого  $q \in \pi(Q)$ . Действительно, согласно условию теоремы  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ . Если  $p \in \pi$ , то  $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$  и  $Q = H^{h(p)}$ . Если же  $p \in \pi'$ , то  $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{\pi'}$ . Но тогда поскольку  $\mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq h(p)$ ,  $Q$  — неабелева группа и  $\pi(Q) \cap \pi \neq \emptyset$ , то  $Q \notin h(p)$ . Значит,  $Q = H^{h(p)}$ . Кроме того, ввиду того что  $\mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq h(q)$  для любого  $q \in \pi(Q)$ , имеем  $H^{h(q)} \subseteq Q$ .

Следовательно, группа  $G$  удовлетворяет условию (2) теоремы 1. Поэтому  $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form} G$  — минимальная  $\omega$ -насыщенная не  $\pi$ -специальная формация. Теорема доказана.

В частности, если  $\omega = \{p\}$  из приведенной теоремы получаем

**Следствие 2.1.** *Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  — минимальная  $p$ -насыщенная не  $\pi$ -специальная формация, когда  $\mathfrak{F} = l^p \text{form} G$ , где  $G$  — такая не  $\pi$ -специальная монолитическая группа с цоколем  $P$ , что группа  $G/P$   $\pi$ -специальна, причем если  $p \in \pi(P)$ , то выполняется одно из следующих условий:*

1)  $P$  — неабелева группа, при этом если  $p \in \pi$ , то  $P = G^{\mathfrak{G}_p \mathfrak{G}_{\pi'}}$ , если же  $p \in \pi'$ , то  $P = G^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ ;

2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с абелевым цоколем  $Q$ , что  $p \notin \pi(Q)$  и  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ .

В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$  — множество всех простых чисел из теоремы 5.1 вытекает

**Следствие 2.2** (А.Н.Скиба [2, с.182]). *Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  — минимальная насыщенная не  $\pi$ -специальная формация, когда  $\mathfrak{F} = l \text{form} G$ , где  $G$  — такая не  $\pi$ -специальная монолитическая группа с цоколем  $P$ , что группа  $G/P$   $\pi$ -специальна и выполняется одно из следующих условий:*

1)  $P = G^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$  — неабелева группа;

2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $p$ -группа, а  $H$  — такая монолитическая группа с абелевым цоколем  $Q$ , что  $(|P|, |Q|) = 1$ ,  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$ .

**Следствие 2.3.** *Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  — минимальная  $\omega$ -насыщенная не  $r$ -специальная формация, когда  $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form} G$ , где  $G$  — такая не  $r$ -специальная монолитическая группа с цоколем  $P$ , что группа  $G/P$   $r$ -специальна и выполняется одно из следующих условий:*

1)  $P$  — неабелева  $\omega d$ -группа, причем если  $\pi(P) \cap \omega \neq \{p\}$ , то  $P = G^{\mathfrak{G}_{p'}}$ ;

2)  $G = [P]H$ , где  $P = C_G(P)$  —  $q$ -группа,  $q \in \omega$  ( $q \neq p$ ),  $H = [Q]N$ , где  $Q = C_H(Q)$  — минимальная нормальная  $r$ -подгруппа группы  $H$ ,  $N \in \mathfrak{G}_{p'}$ ;

3)  $P$  —  $\omega'$ -группа.

**Abstract.** The author obtained a description of minimal partially saturated non- $\mathfrak{H}$ -formations, where  $\mathfrak{H}$  is one of the following formations: the formation of all finite groups with nilpotent commutator subgroup; the formation of all finite metanilpotent groups.

### Литература

1. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.
2. Л. А. Шеметков, А.Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.
3. А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Минск, Беларуская навука, 1997.
4. А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, *Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп*, Матем. труды, 2, № 2 (1999), 114–147.
5. Л. А. Шеметков, *Экраны ступенчатых формаций*, в книге: *Тр. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп*, Киев, Наукова думка, 1980, с. 37–50.
6. А. Н. Скиба, *О критических формациях*, Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, № 4 (1980), 27–33.

7. А. Н. Скиба, *О критических формациях*, в кн.: *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*, Киев, Ин-т математики АН Украины, 1993, с. 258–268.
8. Джарадин Джехад, *Минимальные  $p$ -насыщенные ненильпотентные формации*, Вопросы алгебры, № 8 (1995), 59–64.
9. В. Н. Рыжик, *О критических  $p$ -локальных формациях*, препринт № 58, Гомельский госуниверситет, 1997, 12 с.
10. И. Н. Сафонова, *О критических  $\omega$ -локальных формациях конечных групп*, препринт № 76, Гомельский госуниверситет, 1998, 12 с.
11. И. Н. Сафонова, *О минимальных  $\omega$ -локальных несверхразрешимых формациях*, Вопросы алгебры, № 12 (1998), 123–130.
12. И. Н. Сафонова, *О минимальных  $\omega$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формациях*, Вестн НАН Беларуси, сер. физ.-мат. наук, № 2 (1999), 23–27.
13. И. Н. Сафонова, *О существовании  $\mathfrak{H}_\omega$ -критических формаций*, Известия Гомельского госуниверситета, № 1 (15) (1999), 118–126.
14. И. Н. Сафонова, *К теории  $\mathfrak{H}_\omega$ -критических формаций конечных групп*, Известия Гомельского госуниверситета, № 3 (17) (2001), 124–133.

Гомельский государственный  
университет им. Ф.Скорины

Поступило 15.09.04

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ