

О расчете напряженного состояния покрытий из функционально-градиентных и термочувствительных материалов

В.В. МОЖАРОВСКИЙ, Е.М. БЕРЕЗОВСКАЯ

Представлен алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций из функционально-градиентных материалов с учетом температуры. В качестве объекта исследования рассматривалась плоская слоистая композиционная среда. Построены алгоритмы определения температурного поля для покрытий из функционально-градиентных материалов. Представленный подход может быть основой для дальнейшего развития решений контактных задач с учетом температурных явлений.

Ключевые слова: покрытие, температура, неоднородность, перемещение, ортотропия, слоистые тела.

This paper presents an algorithm for calculating the stress-strain state of laminated structures made of functionally gradient materials with the temperature taken into account. Flat layered composite medium was considered the object of the research. The article provides the algorithms for determining the temperature field for coatings of functionally graded materials. The given approach can be the basis for further development of solutions to contact problems considering temperature effects.

Keywords: strip, temperature, heterogeneous, stress, orthotropy, layered body.

Введение. Несмотря на то что новейшие слоистые композиты нашли широкое применение в качестве конструкционных материалов и были разработаны эффективные инженерные методы оценки поведения этих материалов и их конструкций, существует проблема разработки математических моделей описания термомеханического поведения конструкционных элементов механических и трибологических систем из функционально-градиентных и термочувствительных материалов с физико-механическими характеристиками, зависящими от температуры, при совместном действии локальных силовых (температурных) нагрузений, а также создание алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния рассматриваемых тел, определение трибологических свойств функциональных поверхностей перспективных материалов и покрытий в условиях механического контакта при вдавливании, скольжении контртела.

Эта проблема является актуальной не только в области механики, но и в других отраслях науки и техники (авиационного, энергетического и космического машиностроения) при разработке инженерных методик расчета сложных конструкций из различных материалов. Некоторый обзор, основные аспекты исследований в этом направлении представлены в работах [1]–[8]. В последнее время предложен ряд математических и физических моделей расчета покрытий из композитов [2]–[7]. Значительные исследования и обзор направлений по проблеме контакта термоупругих тел из обычных однородных материалов были проведены в работе [9].

Алгоритм решения граничных задач для неоднородного покрытия с учетом температуры. Пусть жесткий цилиндрический индентор с температурой T внедряется в бесконечное, упругое ортотропное неоднородное покрытие, лежащее на однородном изотропном или ортотропном основании. Будем рассматривать контактные задачи [2]–[4]: в задаче А покрытие свободно без трения лежит на основании; в задаче В покрытие жестко скреплено с основанием.

Необходимо найти распределение давления в области контакта и определить напряженно-деформированное состояние покрытия и основания при следующих граничных условиях для задачи А:

– на верхней границе покрытия:

$$v_{(1)}(x,0) = v_0 - f(x), \quad -a \leq x \leq a;$$

– при отсутствии трения между штампом и полосой:

$$p(x) = -\sigma_{y(1)}(x,0) = 0, \quad |x| > a; \quad \tau_{xy(1)}(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

– при наличии трения в области контакта:

$$p(x) = -\sigma_{y(1)}(x,0) = \tau_{xy(1)}(x,0) = 0, \quad |x| > a; \quad \tau_{xy(1)}(x,0) = fp(x), \quad |x| \leq a;$$

– на нижней границе покрытия:

$$\sigma_{y(1)}|_{y=h} = \sigma_{y(2)}|_{y=h}, \quad \frac{\partial v_{(1)}}{\partial x}|_{y=h} = \frac{\partial v_{(2)}}{\partial x}|_{y=h},$$

$$\tau_{xy(1)}|_{y=h} = 0, \quad \tau_{xy(2)}|_{y=h} = 0,$$

где v_0 – смещение под штампом, $p(x)$ – вертикальное ($p(x) \geq 0$, при $|x| \leq a$), $q(x)$ – касательное давление в области контакта, причем будем считать $q(x) = fp(x)$ (закон Кулона), f – коэффициент трения, $f(x)$ – уравнение контура жесткого штампа, $\sigma_{y(i)}$, $\tau_{xy(i)}$, $v_{(i)}$, $u_{(i)}$ – компоненты тензора напряжений и перемещений для полосы и основания, $i = 1, 2$.

В случае жесткого скрепления неоднородного ортотропного покрытия с однородным основанием используются граничные условия:

$$\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x}|_{y=h} = \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x}|_{y=h}, \quad \tau_{xy(1)}|_{y=h} = \tau_{xy(2)}|_{y=h}.$$

С учетом температурных эффектов граничные условия будут [9]:

$$k_2 \frac{\partial T}{\partial y} = \begin{cases} -q(x), & x \in \Gamma, \\ hT(x), & x \notin \Gamma; \end{cases} \quad \sigma_{xy}(x) = \begin{cases} fp(x), & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \Gamma; \end{cases}$$

$$\sigma_{yy}(x) = \begin{cases} -q(x), & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \Gamma; \end{cases} \quad q(x) = -fVp(x), \quad x \in \Gamma, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{x}{R}, \quad x \in \Gamma.$$

Для решения данной контактной задачи необходимо построить функцию Грина, а затем, учитывая граничные условия, составить интегральное уравнение, из решения которого и будет определено неизвестное давление $p(x)$ в зоне контакта.

Функция Грина строится по формулам для вертикального перемещения v на границе неоднородной ортотропной полосы $y=0$ при действии нормальной и/или касательной единичной силы, определяя перемещение относительно произвольно заданной точки, и представляет собой сумму двух слагаемых, являющихся результатом действия этих сил.

Сначала строим решение для неоднородного покрытия по методике [9] с учетом температурных эффектов. Тогда можно построить суммарное перемещение как суперпозицию:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv^y}{dx} + \frac{dv^T}{dx},$$

где v^y – упругие вертикальные перемещения для полосы (покрытия), v^T – перемещения, возникающие от действия температуры.

Функцию Грина $v(x-t)$ для упругих перемещений определяем по алгоритму, представленному в работах [2]–[4]:

$$v(x-t,0) = \frac{e^{k(x-t)}}{\pi} \int_0^\infty (((A^p(x-t,\alpha) + A^q(x-t,\alpha))Q_2 + (B^p(x-t,\alpha) + B^q(x-t,\alpha))Q_4)l - ((N^p(x-t,\alpha) + N^q(x-t,\alpha))Q_2t_2 + (K^p(x-t,\alpha) + K^q(x-t,\alpha))Q_4t_4)\alpha \cos \alpha(x-t))d\alpha + const.$$

Коэффициенты приведены в работах [2]–[4]. Перемещения с учетом температурных эффектов определяем согласно методике [9]. Реализация алгоритма производится при различных параметрах неоднородности типа [8]:

$$a_{ij}(x, y, k, l) = H_{ij}e^{kx+ly}, \quad (1)$$

где k, l – параметры неоднородности материала, H_{ij} – упругие постоянные матрицы податливости однородной теории упругости. Например, для демонстрации влияния неоднородности на изменения напряжений и перемещений рассматривалась неоднородная полоса, лежащая на ортотропном основании. В качестве базового материала для неоднородной полосы рассматривались высокомодульные неоднородные волокна с техническими характеристиками $E_1 = 194.0 \text{ ГПа}$, $E_2 = 7.72 \text{ ГПа}$, $G_{12} = 4.21 \text{ ГПа}$, $\nu_{12} = 0.3$. Принималось равномерное действие усилий $p_0 = \frac{P}{2a}$ в области контакта $[-a, a]$, при $a=1$, P – суммарное усилие, действующее на покрытие. В качестве ортотропного основания рассматривался углепластик с техническими характеристиками $E_1 = 119.5 \text{ ГПа}$, $E_2 = 9.5 \text{ ГПа}$, $G_{12} = 4.6 \text{ ГПа}$, $\nu_{12} = 0.3$. Гетерогенность материала полосы определялась по экспоненциальному закону (1). Изучалось влияние распределения касательных напряжений для свободно лежащей полосы на ортотропном основании при различных значениях параметров неоднородности, в случае, когда $E_1 > E_2$, на границе раздела покрытие – основание (рисунки 1, 2).

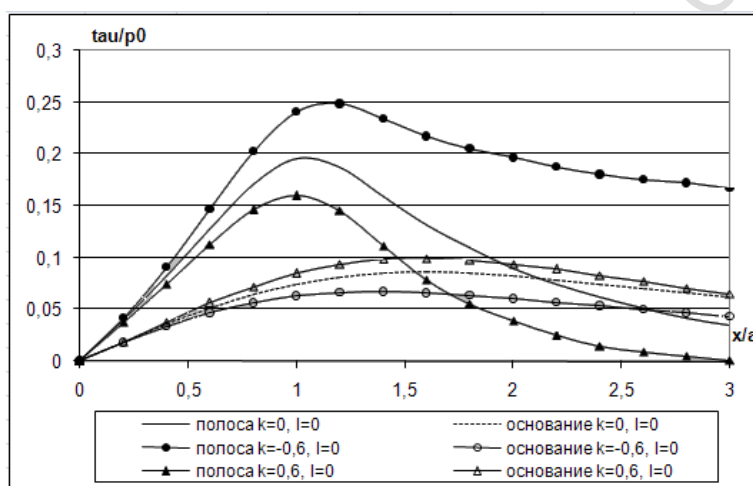


Рисунок 1 – Влияние параметров неоднородности на распределение касательных напряжений на границе раздела покрытие – основание, $a/h = 1$

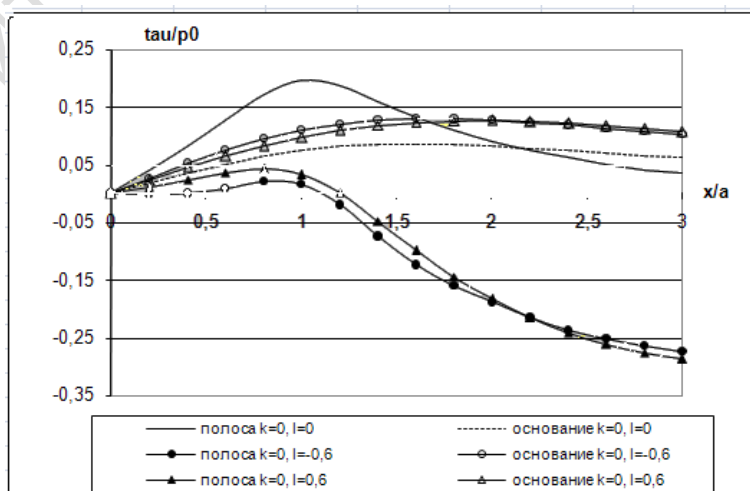


Рисунок 2 – Влияние параметров неоднородности на распределение касательных напряжений на границе раздела покрытие – основание, $a/h = 2$

Проведены исследования распределения вертикальных перемещений в полосе и основании для рассматриваемых материалов с теми же предположениями. Графическая иллюстрация полученных результатов представлена на рисунке 3.

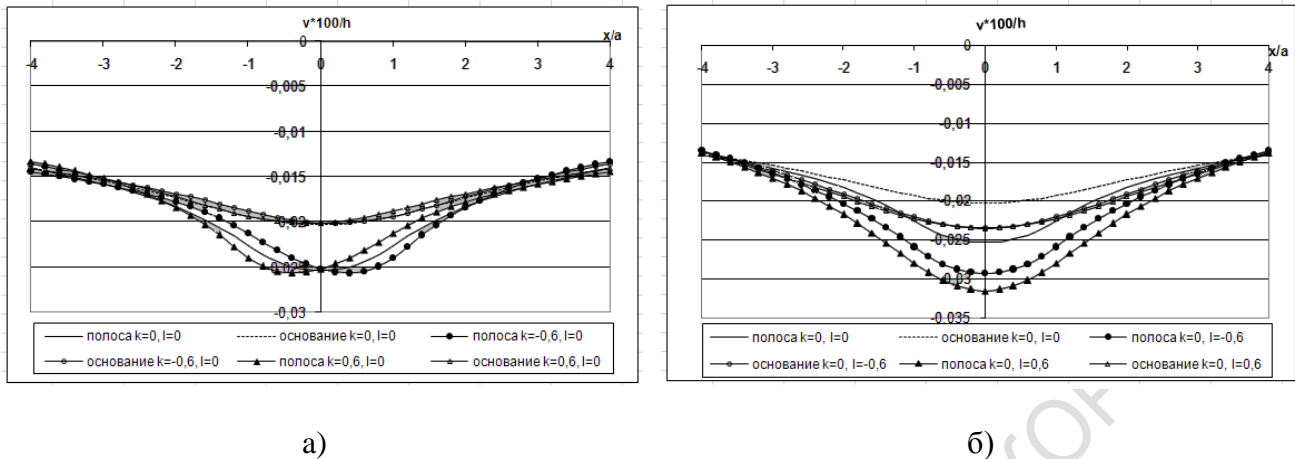


Рисунок 3 – Распределение вертикальных перемещений в полосе при $y/h=0.5$ и в основании при $y/h=2$ в зависимости от параметров неоднородности: а) – изменение неоднородности по оси x ; б) – изменение неоднородности по оси y

Реализация алгоритма определения температурного поля для покрытий из функционально-градиентных материалов (ФГМ). Исследуем изменение температурного поля в покрытии из функционально-градиентных материалов в случае движения индентора по поверхности покрытия. Для этого используем разработанные теоретические подходы в работах [2],[5],[9]–[11]. Составляем алгоритм расчета, строим графические зависимости изменения температуры в покрытии для различных температурных параметров, например, изменение теплопроводности в зависимости от глубины, т.е. по закону теплопроводности [10] $k_2(y) = k_1 e^{\delta y}$, где индекс 1 – коэффициент теплопроводности на поверхности слоя, 2 – внутри слоя и k_3 – теплопроводность на границе слой-основание. Считая, что температурный коэффициент на глубине $y = h$ равен k_3 , определяем параметр $\delta = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{k_3}{k_1}\right)$.

Для анализа результатов и исследования влияния параметров теплопроводности найдем изменение температуры в покрытии, считая, что она возникает в области контакта индентор-покрытие, при этом в области контакта $(-a, a)$ действуют постоянные напряжения $\sigma_{yy} = const$. Согласно работе [10] температурное поле T в покрытии должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

и граничным условиям:

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial y} = -f(x), |x| < a,$$

где $f(x)$ – функция, зависящая от нормального напряжения, коэффициента трения, скорости индентора на поверхности.

Считаем, что температура при $y = h$ будет $T(x, h) = 0$. Решая уравнение (2) с помощью преобразования Фурье, при заданных граничных условиях получим:

$$T = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 y} e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_2 y} e^{\lambda_1 h}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 h} - \lambda_2 e^{\lambda_1 h}} \cdot \tilde{f}(\beta) e^{-i\beta x} d\beta,$$

где $\lambda_1(\beta) = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \beta^2}$, $\lambda_2(\beta) = -\frac{\delta}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \beta^2}$, $\tilde{f}(\beta) = -\int_{-a}^a \frac{f(t)}{k_1} e^{i\beta t} dt$.

В частности, учитывая симметрию и считая, что $f(x) = const$ (например, приняв согласно работе [10] $f(x) = -\mu\nu\sigma_{yy} = c_y$, где $\sigma_{yy} = const$ – действующие напряжения в зоне контакта, μ – коэффициент трения, ν – скорость движения индентора), имеем $\tilde{f}(\beta) = -\frac{2\sin a\beta}{\beta}c_y$, а температуру T находим из уравнения:

$$T = -\frac{4}{\pi}c_y \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 y} e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_2 y} e^{\lambda_1 h}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 h} - \lambda_2 e^{\lambda_1 h}} \cdot \frac{\sin a\beta}{\beta} \cos \beta x d\beta.$$

Результаты решения представлены в виде графического материала на рисунках 4–9, расчеты производились при изменении параметра δ , при $\frac{a}{h} = 1$.

Из анализа графических зависимостей (рисунки 4–9, изменение температуры приведено в относительных единицах) следует, что изменение свойств теплопроводности влияет на характер изменения температуры покрытия.

Так скорость падения температуры с толщиной покрытия уменьшается по сравнению с материалами, в которых теплопроводность одинакова для всех толщин покрытия. Такое свойство дает возможность более медленно остывать покрытию и поддерживать температуру. Характер изменения температуры по глубине (по оси Oy) зависит от соотношения коэффициентов теплопроводности на поверхности и на границе основания. В одном случае кривые изменения температуры (рисунки 4–8) являются вогнутыми, если $k_3 > k_1$, и выпуклыми (рисунок 9), если $k_3 < k_1$.

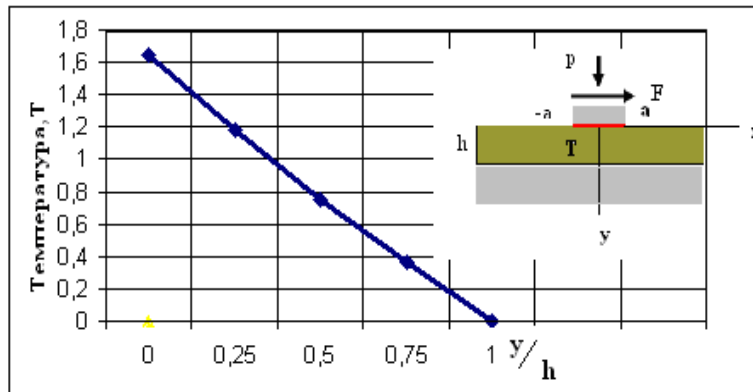


Рисунок 4 – Характер изменения температуры по толщине покрытия при $x = 0$ для однородного материала ($\delta = 0$)

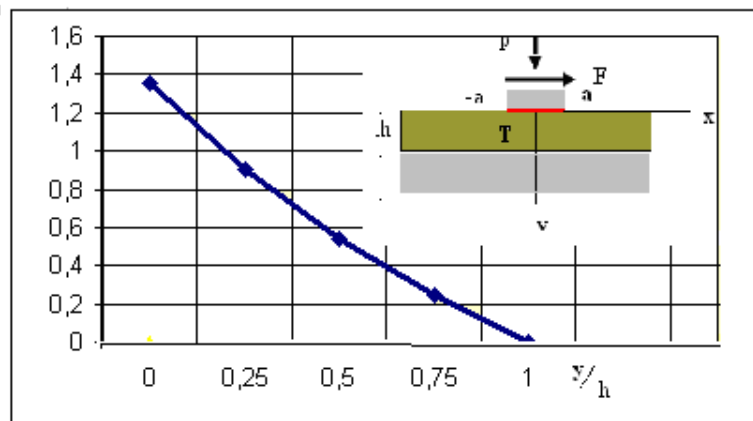


Рисунок 5 – Характер изменения температуры по толщине покрытия при $x = 0$ для однородного материала ($\delta = 0.5$)

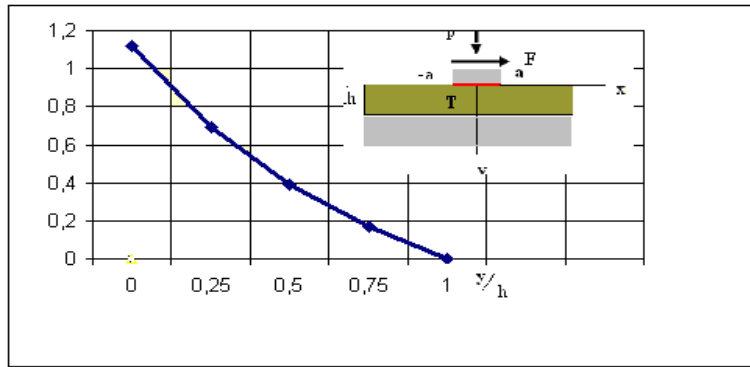


Рисунок 6 – Характер изменения температуры по толщине покрытия при $x = 0$ для однородного материала ($\delta = 1$)

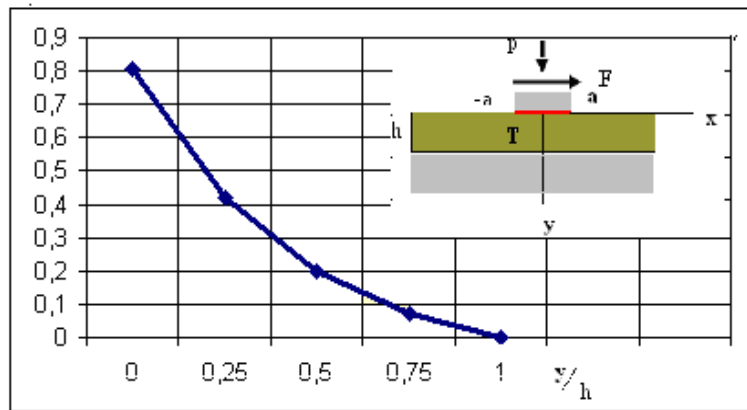


Рисунок 7 – Характер изменения температуры по толщине покрытия при $x = 0$ для однородного материала ($\delta = 2$)

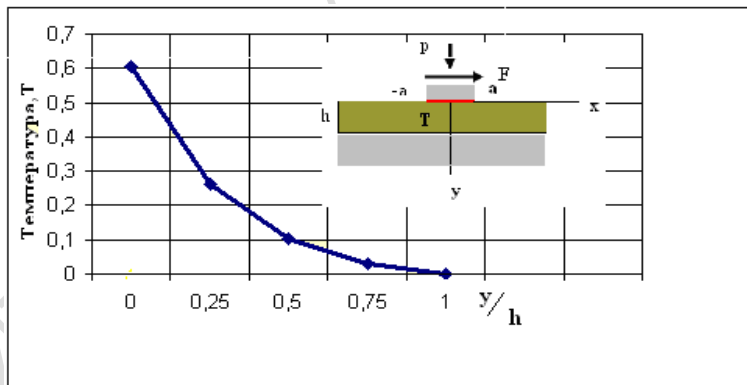


Рисунок 8 – Характер изменения температуры по толщине покрытия при $x = 0$ для однородного материала ($\delta = 3$)

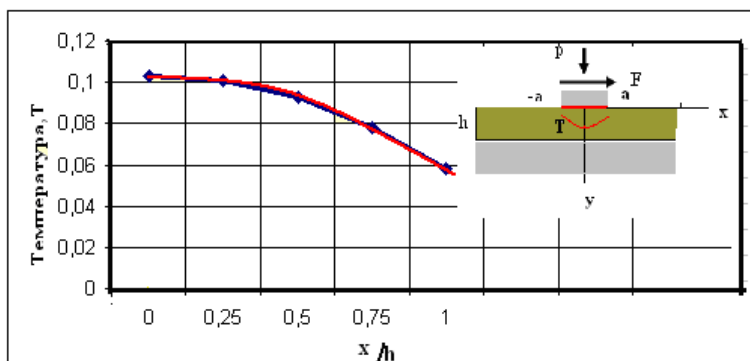


Рисунок 9 – Характер изменения температуры по оси Ox при $y = 0.5$

Наблюдаемые изменения температуры дают возможность в зависимости от геометрических и физических параметров материала слоя подбирать материалы из функционально-градиентных свойств, которые необходимы для создания эксплуатационно-надежных покрытий в трибологических системах.

Заключение. В результате проведенных исследований разработан алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций из функционально-градиентных материалов с учетом температуры. Построены алгоритмы определения температурного поля для покрытий из функционально-градиентных материалов (ФГМ). Представленный подход может быть основой для дальнейшего развития решений контактных задач с учетом температурных явлений.

Литература

1. Можаровский, В.В. Анализ механико-математических моделей расчета функционально-градиентных материалов, работающих в условиях контактного взаимодействия / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // *Материалы, Технологии и инструменты*. – 2013. – № 4, С. 5–13.
2. Можаровский, В.В. Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский, Ю.М. Плескачевский, С.Ю. Бабич, Е.М. Березовская // *Трение и износ*. – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.
3. Можаровский, В.В. Определение напряженно-деформированного состояния слоистых неоднородных тел / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // *Научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика»*. – Донецкий национальный университет, Харьков, 2001. – Вып. 34. – С. 3–9.
4. Березовская, Е.М. Методика расчета напряженно-деформированного состояния неоднородной полосы, находящейся под действием внешних сил / Е.М. Березовская // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель*. – 2007. – № 6 (45). – С. 150–154.
5. Можаровский, В.В. Исследование особенностей распределения полей напряжений в многослойных покрытиях / В.В. Можаровский, Н.А. Марьина // *Известия ГГУ Ф.Скорины, Гомель*. – 2013. – № 6. – С. 34–43.
6. Можаровский, В.В. Напряженное состояние упругого ортотропного основания с однородным покрытием с учетом трения / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // *Трение и износ*. – 1999. – Т. 20, № 5. – С. 471–479.
7. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука, 1988. – 280с.
8. Bikartas, I. The contact problem of an orthotropic non-homogeneous elastic half space / I. Bikartas // *Int. J. Eng. Sci.* – 1984. – № 22. – P. 347–359.
9. Sakti, Pada Barik Effect of anisotropy on thermoelastic contact problem / Sakti Pada Barik, M. Kanoria, P.K. Chaudhuri // *Applied Mathematics and Mechanics*. – 2008. – V. 29. – № 4. – P. 501–510.
10. Peijian, C. Thermo-mechanical contact behavior of a finite graded layer under a sliding punch with heat generation / C. Peijian, C. Shaohua // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – V. 50. – PP. 1108–1119; № 6. – P. 34–43.
11. Giannakopoulos, A.E. Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials. / A.E. Giannakopoulos, P. Pallot // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2000. – № 48. – P. 1597–1631.