Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

*УДК 512.542*

# Конечные группы с обобщенно-субнормальными формационными подгруппами

В.Н. Семенчук

Рассматриваются конечные группы по заданным свойствам некоторой системы подгрупп, в частности – конечные группы, у которых силовские подгруппы обобщенно субнормальны. В классе конечных разрешимых групп описаны формации, замкнутые относительно произведения обобщенно субнормальных формационных подгрупп взаимно простых индексов.
**Ключевые слова:** группа, формация, корадикал, обобщенно субнормальная подгруппа, индекс, группа Шмидта.

Final groups on the set properties of some system of subgroups, in a particular – final groups, at which silovsky subgroups generally субнормальны are considered. In a class of final solvable groups the formations closed concerning work generally of subnormal formational subgroups of mutually simple indexes are described.
**Keywords:** group, formation, co radical, generalized subnormal subgroup, index, Shmidt group.

**Введение.** Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс конечных групп. Очевидно, что любая конечная группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-группу, т.е. группу, не принадлежащую $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы (критические группы) имеют богатую историю. Начало их исследований восходит к известной работе Миллера – Морено [1], в которой были изучены минимальные неабелевы группы (группы Миллера – Морено). Следующий важный шаг в данном направлении сделал О.Ю. Шмидт в работе [2], в которой были изучены минимальные ненильпотентные группы (группы Шмидта). В. Хупперт в [3], а затем К. Дерк в [4] изучили минимальные несверхразрешимые группы. В.Н. Семенчуком [5] были изучены разрешимые минимальные не $\mathfrak{F}$-группы для произвольных насыщенных наследственных формаций $\mathfrak{F}$.

Как показали дальнейшие исследования многих ведущих алгебраистов, критические группы играют важную роль при изучении строения конечных групп. Так, Л.А. Шеметковым в Коуровской тетради была поставлена следующая проблема.

**Проблема.** Описать наследственные формации, у которых критические группы – либо группы Шмидта, либо группы простого порядка.

В настоящее время такие формации называют *формациями Шеметкова*. В работах таких математиков как А.Н. Скиба [6], А.Ф. Васильев, В.Н. Семенчук [7], С.Ф. Каморников [8], [9], Баллестер-Болинше [10] и др. было получено полное описание формаций Шеметкова и показана их роль при описании конечных групп, факторизуемых формационными обобщенно субнормальными подгруппами.

Напомним, что понятие обобщенной субнормальной подгруппы ($\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы) [11] в теории классов конечных групп является естественным обобщением понятия субнормальности.

**Определение 1.** Подгруппу $H$ называют *F-достижимой* в смысле Кегеля или *F*-достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_{n-1} \supseteq H_n = H,$$

такая, что для любого $i = 1,2,\ldots,n$ либо подгруппа $H_i$ нормальна в $H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В работе [12] было доказано, что в классе конечных разрешимых групп непустая наследственная формация является формацией Шеметкова тогда и только тогда, когда она замкнута относительно произведений формационных обобщенно субнормальных подгрупп. Ряд интересных свойств формаций Шеметкова было получено в работе [13].

Настоящая работа посвящена изучению строения следующих непустых формаций.

**Определение 2.** Будем говорить, что непустая наследственная формация $\mathfrak{F}$ обладает свойством *(*)*, если любая её минимальная не $\mathfrak{F}$-группа либо примарная, либо бипримарная дисперсивная группа.

Очевидно, что любая непустая формация Шеметкова обладает свойством (*). Обратное утверждение неверно. Действительно. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех абелевых групп. Хорошо известно, что любая минимальная неабелева группа либо примарная, либо бипримарная дисперсивная. Следовательно, формация всех абелевых групп обладает свойством (*), но очевидно, что данная формация не является формацией Шеметкова.

Пусть $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. $\mathfrak{G}_\pi$ – формация всех $\pi$-групп, где $\pi = \{p, q\}$, $p, q$ – некоторые различные простые числа. Известно, что любая минимальная несверхразрешимая группа дисперсивна. Отсюда следует, что формация $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_\pi$ обладает свойством (*). Однако нетрудно показать, что формация $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_\pi$ не является формацией Шеметкова.

Все группы в работе конечны. Напомним некоторые определения и обозначения.

**1 Предварительные сведения.** Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и $G$ – группа, то *корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ пересечение всех нормальных подгрупп $N$ из $G$, таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

*Формация* – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Формация называется *насыщенной*, если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если $G \in \mathfrak{F}$ и $H \subseteq G$, то $H \in \mathfrak{F}$.

$G_p$ – силовская $p$-подгруппа группы $G$.

Группа $G$ называется *$p$-замкнутой* (*$p$-нильпотентной*), если её силовская $p$-подгруппа (силовское $p$-дополнение) нормальна в $G$. Группа $G$ называется *$p$-разложимой*, если она одновременно $p$-замкнута и $p$-нильпотентна.

Максимальная подгруппа $M$ группы $G$ называется $\mathfrak{F}$-абнормальной, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Важную роль при доказательстве основных результатов работы сыграли следующие свойства *F*-достижимых подгрупп.

**Лемма 1.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, $H$ и $N$ – подгруппы группы $G$, причем $N$ нормальна в $G$. Тогда:

1) если $H$ $\mathfrak{F}$-достижима в $G$, то $HN$ $\mathfrak{F}$-достижима в $G$ и $HN/N$ $\mathfrak{F}$-достижима в $G/N$;

2) если $N \subseteq H$, то $H$ $\mathfrak{F}$-достижима в $G$ тогда и только тогда, когда $H/N$ $\mathfrak{F}$-достижима в $G/N$.

**Лемма 1.2.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $H$ – подгруппа группы $G$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы $G$;

2) если $H$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы $G$, то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа $K$ для любой подгруппы $K$ группы $G$;

3) если $H$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы $K$ и $K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы $G$, то $H$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы $G$;

4) если $H$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы $G$, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы $G$.

## 2 Основные результаты

**Теорема 2.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, обладающая свойством (*). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) группа $G$ принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из $G$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-достижима в $G$;

2) разрешимая группа $G$ принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G = AB$, где $A$ и $B$ принадлежат $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-достижимы в $G$, причем $(|G:A|,|G:B|)=1$.

**Следствие 2.1.1.** Группа $G$ абелева тогда и только тогда, когда любая её силовская подгруппа абелева и субнормальна в $G$.

**Следствие 2.1.2.** Группа $G$ $p$-нильпотентна тогда и только тогда, когда любая её силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в $G$, где $\mathfrak{F}$ – формация всех $p$-нильпотентных групп.

**Следствие 2.1.3.** Группа $G$ $p$-разложима тогда и только тогда, когда любая её силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в $G$, где $\mathfrak{F}$ – формация всех $p$-разложимых групп.

**Следствие 2.1.4.** Группа $G$ абелева тогда и только тогда, когда она представима в виде произведения абелевых субнормальных подгрупп взаимно простых индексов.

**Определение 3.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{F}$-абнормальной, если для любой максимальной цепи

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{n-1} \supset H_n = H,$$

подгруппа $H_i$ $\mathfrak{F}$-абнормальной в $H_{i-1}$ для любого $i = 1,2,...,n$.

В работах [14, 15] были описаны конечные группы, у которых любая собственная подгруппа нормальна либо абнормальна. В работе [16] изучались группы, у которых любая собственная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна для произвольной насыщенной формации $\mathfrak{F}$. В частности, были полностью изучены такие группы для насыщенных наследственных разрешимых формаций Шеметкова.

Развивая данное направление, удалось доказать следующие теоремы.

**Теорема 2.2.** Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная разрешимая формация, обладающая свойством (*). Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы $G$ ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) либо $\mathfrak{F}$-достижима, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда $G$ – разрешимая группа одного из следующих типов:

1) $G \in \mathfrak{F}$;

2) $G = [G_{p'}]G_p \in \mathfrak{F}$, где $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, $G_p$ – $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы $G$ и любая собственная подгруппа из $G_p$ $\mathfrak{F}$-достижима в $G$.

**Теорема 2.3.** Тогда и только тогда в группе $G$ любая собственная подгруппа либо $\mathfrak{U}$-достижима, либо $\mathfrak{U}$-абнормальна ($\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп), когда группа $G$ одного из следующих типов:

1) $G$ – сверхразрешимая группа;

2) $G$ – дисперсивная группа, такая, что $G=[G^{\mathfrak{U}}]H$, где $(|G^{\mathfrak{U}}|,|\mathrm{H}|)=1$, любая собственная подгруппа $G$, содержащая $G^{\mathfrak{U}}$ сверхразрешима, $H$ – $\mathfrak{U}$-проектор и $H\Phi(\mathrm{G})/\Phi(\mathrm{G})$ – либо группа Миллера-Марена, либо примарная абелева группа.



## Литература

1. Miller, G.A. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A. Miller, H.C. Moreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – V. 4. – P. 398–404.

2. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31, № 3. – С. 366–372.

3. Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlichen Gruppen / B. Huppert // Math. Z.– 1954.–V. 60.– P. 409–434.

4. Doerk, K. Minimal nicht Uberauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – 91. – P. 198–205.

5. Семенчук, В.Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.

6. Скиба, А.Н. Об одном классе локальных формаций конечных групп / А.Н. Скиба // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34, № 1. – С. 382–385.

7. Семенчук, В.Н. Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп, Тр. / Ин–т математики АН БССР. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 175–181.

8. Каморников, С.Ф. О двух задачах из «Коуровской тетради» / С.Ф. Каморников // Мат. заметки. – 1994. – Т. 55, № 6.– С. 59–63.

9. Каморников, С.Ф. О двух проблемах Л.А. Шеметкова / С.Ф. Каморников // Сиб. мат. журнал.– 1994.– Т. 35, № 4. – С. 801–812.

10. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. – 1978. – 272 с.

11. Kegel, O.H. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – V. 30. – P. 225–228.

12. Семенчук, В.Н. Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации / В.Н. Семенчук // Мат. заметки. – 1996.– Т. 59, № 2.– С. 261–266.

13. Семенчук, В.Н. Характеризация $S$-формаций / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – Минск : Изд-во «Университетское». – 1992. – № 6. – С. 103–108.

14. Ebert G., Bauman, S. A note on subnormal and abnormal chains // J. Algebra. – 1975. – V. 36, № 2. – P. 287–293.

15. Fattachi A. Groups with only normal and abnormal subgroups// J. Algebra. – 1974. – V. 28, № 1. – P. 15–19.

16. Семенчук В.Н. Конечные группы с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами // Мат. заметки. – 1994. – Т. 56, № 6. – С. 111–115.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.05.2014