Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Обобщенно достижимые подгруппы в конечных E_π-группах

Л.М.Белоконь

Пусть G — конечная разрешимая группа, U и V — ее подгруппы, G_π — S_π-подгруппа (=холлова π-подгруппа) из G, редуцируемая в U и V, т.е. $G_\pi \cap U$ и $G_\pi \cap V$ — S_π-подгруппы U и V соответственно. В работе [1] поставлен вопрос: будет ли G_π редуцироваться в $U \cap V$, т.е. является ли $G_\pi \cap U \cap V$ S_π-подгруппой в $U \cap V$? К.Дёрком в работе [2] с помощью примера дается отрицательный ответ. Однако вопрос положительно решается основным результатом этой же работы в случае, когда $\pi = \{p\}$, U и V p-нормально погружены в G; доказано также, что в такой ситуации $U \cap V$ p-нормально погружена в G. Пример 2 из [2] указывает на невыполнимость этого результата для G_π, $|\pi| > 1$, если потребовать p-нормальную погруженность подгрупп U и V в группу G для всех $p \in \pi \cap \pi(G)$.

В настоящей работе доказывается справедливость результата К.Дёрка для необязательно разрешимых групп и для произвольного множества простых чисел π с условием на подгруппы U и V, использующим понятие $\mathfrak{G}_{\pi'}$-достижимой погруженности; получены новые признаки обобщенно достижимой погруженности пересечений подгрупп, обобщенно достижимо погруженных в группу. Продолжены исследования, связанные с изучением условий перестановочности S_π-подгруппы G_π конечной группы G с пересечением подгрупп, перестановочных с G_π. Показано, что требование $\mathfrak{G}_\pi$-достижимости в основных результатах [3] может быть ослаблено до их частичной квазидостижимости.

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [4], через π обозначаем некоторое множество простых чисел.

Определение 1 ([5]). Подгрупа U группы G называется π-нормально погруженной в G, если в U существует S_π-подгруппа, являющаяся S_π-подгруппой некоторой нормальной в G подгруппы.

Определение 2. Подгруппа U группы G называется π-достижимо погруженной в G, если U обладает S_π-подгруппой, являющейся S_π-подгруппой некоторой достижимой (=субнормальной) в G подгруппы.

Следуя [6], подгруппу H группы G называем $\mathfrak{G}_\pi$-достижимой в G, если в G существует такая цепь подгрупп $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = H$, что либо $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$, либо $G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}} \in \mathfrak{G}_\pi$.

Определение 3. Подгруппу U группы G назовем $\mathfrak{G}_{\pi'}$-достижимо погруженной в G, если U обладает S_π-подгруппой, являющейся S_π-подгруппой некоторой $\mathfrak{G}_{\pi'}$-достижимой в G подгруппы.

Определение 4 ([7]). Подгруппа H группы G называется π-квазидостижимой в G, если для любого $p \in \pi \cap \pi(H)$ и для любой S_p-подгруппы G_p из G подгруппа $H \cap G_p$ является силовской p-подгруппой в H.

Полагая $\pi(H) \subseteq \pi$, из определения 1.4 получаем определение квазидостижимой подгруппы H в G.

Лемма 1. *Пусть H — π-квазидостижимая подгруппа группы G. Если $|G|_\pi = |H|_\pi$, то H_G содержит все S_p-подгруппы G для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$.*

Доказательство. Из определения π-квазидостижимой подгруппы и условия леммы следует, что H содержит все S_p-подгруппы G для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$. Пусть g —

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

произвольный элемент группы G. Так как H^g и H — изоморфные подгруппы G, то H^g также содержит все S_p-подгруппы G для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$, а значит, их содержит и $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть H — $\mathfrak{S}_{\pi'}$-достижимая подгруппа в группе G. Тогда H π-квазидостижима в G.*

Доказательство. Пусть $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq ... \supseteq G_t = H$ — цепь подгрупп, в которой либо $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$, либо $G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}} \in \mathfrak{S}_{\pi'}$ для любого $i \in \{1, 2, ..., t\}$. Лемма верна при $t = 0, t = 1$. Пусть $G \supset G_1$; из соображений индукции H π-квазидостижима в G_1. Если $G_1 \trianglelefteq G$, то G_1 π-квазидостижима в G; если $G/(G_1)_G$ — π'-группа, то G_1 содержит все S_p-подгруппы G для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$, а значит, G_1 π-квазидостижима в G и в этом случае. Пусть $p \in \pi \cap \pi(H)$. Тогда $p \in \pi(G_1) \subseteq \pi(G)$. Любая S_p-подгруппа G содержит некоторую S_p-подгруппу G_1, а любая S_p-подгруппа G_1 содержит некоторую S_p-подгруппу H, поэтому любая S_p-подгруппа G содержит некоторую S_p-подгруппу H. Так как p — произвольный простой π-делитель $|H|$, то H π-квазидостижима в G. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$, и пусть N и M — перестановочные $\mathfrak{S}_{\pi'}$-достижимые в G подгруппы такие, что U обладает общей S_π-подгруппой с N, V обладает общей S_π-подгруппой с M. Если S_π-подгруппа G_π группы G редуцируется в U и в V, то G_π редуцируется также в $U \cap V$, причем $G_\pi \cap U \cap V$ совпадает с $G_\pi \cap N \cap M$ — S_π-подгруппой $N \cap M$ (и, значит, $U \cap V$ $\mathfrak{S}_{\pi'}$-достижимо погружена в G).*

Доказательство. По условию, $G_\pi \cap U = U_\pi$, $G_\pi \cap V = V_\pi$ — S_π-подгруппы U и V соответственно. Из $\mathfrak{S}_{\pi'}$-достижимости N и M в G и леммы 1 из [6] получаем, что $U \cap N$ $\mathfrak{S}_{\pi'}$-достижима в U, $V \cap M$ $\mathfrak{S}_{\pi'}$-достижима в V. А так как $|U \cap N|_\pi = |U|_\pi$, $|V \cap M|_\pi = |V|_\pi$, то из леммы 1 и леммы 2 следует, что N содержит все p-подгруппы U для любого $p \in \pi \cap \pi(U)$, а M — все S_p-подгруппы V для любого $p \in \pi \cap \pi(V)$. Значит, $N \cap U_\pi = U_\pi = N_\pi = N \cap G_\pi$, $M \cap V_\pi = V_\pi = M_\pi = M \cap G_\pi$ — S_π-подгруппы N и M соответственно. Так как

$$|NM|_\pi \geq |\langle N_\pi, M_\pi \rangle| \geq \frac{|N_\pi||M_\pi|}{|N_\pi \cap M_\pi|} \geq \frac{|N_\pi||M_\pi|}{|N \cap M|_\pi} = |NM|_\pi,$$

то $N_\pi M_\pi$ — S_π-подгруппа NM, а $N_\pi \cap M_\pi$ — S_π-подгруппа $N \cap M$. Ясно, что $N_\pi \cap M_\pi = G_\pi \cap U \cap V = G_\pi \cap N \cap M$. Осталось показать, что $G_\pi \cap U \cap V$ — S_π-подгруппа $U \cap V$.

Ввиду доказанного ранее $N \cap M$ содержит каждую S_p-подгруппу группы $U \cap V$ для любого $p \in \pi \cap \pi(U \cap V)$. Поэтому $|U \cap V|_\pi \leq |N \cap M|_\pi$. Но $N_\pi \cap M_\pi = G_\pi \cap U \cap V \subseteq U \cap V$, откуда $|N \cap M|_\pi \leq |U \cap V|_\pi$. Следовательно, $|M \cap N|_\pi = |U \cap V|_\pi$, а $N_\pi \cap M_\pi = G_\pi \cap U \cap V$ — S_π-подгруппа $U \cap V$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$, и пусть N и M — перестановочные подгруппы G, одна из которых достижима в G и обладает общей S_π-подгруппой с U, а другая $\mathfrak{S}_{\pi'}$-достижима в G и обладает общей S_π-подгруппой с V. Если S_π-подгруппа G_π группы G редуцируется в U и в V, то G_π редуцируется также в $U \cap V$ и $U \cap V$ $\mathfrak{S}_{\pi'}$-достижимо погружена в G.*

Следствие 1.2. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$. Если U и V π-нормально погружены в G, G_π — S_π-подгруппа G, редуцируемая в U и в V, то G_π редуцируется в $U \cap V$ и $U \cap V$ π-нормально погружена в G.*

Следствие 1.2 усиливает и дополняет сформулированную в [5] теорему D.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Следствие 1.3. *Пусть U и V — подгруппы группы G, G_p — S_p-подгруппа G. Если U и V p-нормально погружены в G и G_p редуцируется в U и в V, то G_p редуцируется также в $U \cap V$ и $U \cap V$ p-нормально погружена в G.*

Утверждение следствия 1.3 доказано в [2] для разрешимой группы G.

Следствие 1.4. *Пусть U и V — подгруппы группы $G = UV \in D_\pi$. Если U и V π-нормально погружены в G, то $U \cap V$ также π-нормально погружена в G.*

Доказательство. Так как $U \in E_\pi, V \in E_\pi$, то согласно результату Х.Виландта [8] в U и в V существуют холловские π-подгруппы U_π и V_π (соответственно) такие, что $U_\pi V_\pi = G_\pi$ — S_π-подгруппа G. Значит, G_π редуцируется в U и в V. Теперь применим следствие 1.2.

Следствие 1.4 усиливает и обобщает теорему 6 работы [9].

Лемма 3. *Пусть K — квазидостижимая π-подгруппа группы G, A — подгруппа G такая, что $|A|_\pi = |G|_\pi$. Тогда $K \subseteq A_G$.*

Доказательство. Так как в тривиальном случае $K = 1$ лемма верна, то $\pi \cap \pi(K) \neq \neq \varnothing$. Ввиду условия леммы любая S_p-подгруппа A содержит некоторую S_p-подгруппу K для любого р $\in \pi(K)$. Значит, $K \subseteq A$. А так как $|A| = |A^g|$ для всякого $g \in G$, то $K \subseteq A^g$. Итак,

$$K = \bigcap_{g \in G} A^g = A_G.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $G = AC = BC$, где A, B, и C — подгруппы группы G, индексы A и B в G не имеют общих π-делителей $\neq 1$. Если K — квазидостижимая π-подгруппа C, то $K = (K \cap A)(K \cap B)$; в частности, если C – π-группа, то $C = (C \cap A)(C \cap B)$.*

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию леммы, и $q \in \in \pi(K)$. Так как числа $|G : A|$ и $|G : B|$ не имеют общих π-делителей, то пусть, для определенности, $|G : A|$ не делится на q. Так как $G = AC$, то $C_q = (A \cap C)_q$ для некоторых S_q-подгрупп C_q из C и $(A \cap C)_q$ из $A \cap C$. Ввиду квазидостижимости K в C подгруппа C_q содержит некоторую S_q-подгруппу K. Итак, для любого $q \in \pi(K)$, не делящего $|G : A|$, $A \cap C$ содержит хотя бы одну S_q-подгруппу K. Дальнейшее доказательство повторяет соответствующий фрагмент доказательства леммы 1 из [3].

Лемма 5 ([7]). *Пусть H — π-квазидостижимая подгруппа G, N — нормальная подгруппа G. Тогда HN/N — π-квазидостижимая подгруппа G/N.*

Лемма 6 ([7]). *Пусть H и K — подгруппы G, $H \subseteq K$, H π-квазидостижима в G. Тогда H π-квазидостижима в K.*

Теорема 2. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$, и пусть G_π — холловская π-подгруппа группы G, перестановочная с U и V. Пусть $U \cap V$ π'-квазидостижима в $G_\pi U$ или в $G_\pi V$. И пусть $U \cap G_\pi \trianglelefteq G_\pi$, либо $V \cap G_\pi \trianglelefteq G_\pi$. Тогда G_π перестановочна с $U \cap V$.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка. Очевидно, $|G|$ делится на простые числа из π'.

Допустим, что $G_\pi U \subset G$. В группе $G_\pi U$ подгруппы U и $\overline{V} = G_\pi U \cap V$ перестановочны с G_π. Если $U \cap V$ π'-квазидостижима в $G_\pi U$, то и

$$U \cap \overline{V} = U \cap (G_\pi U \cap V) = U \cap V$$

π'-квазидостижима в $G_\pi U$. А если $U \cap V$ π'-квазидостижима в $G_\pi V$, то $U \cap \overline{V} = U \cap V$ π'-квазидостижима в $G_\pi(G_\pi U \cap V) = G_\pi \overline{V}$ по лемме 6. Из $V \cap G_\pi \trianglelefteq G_\pi$ следует

$$\overline{V} \cap G_\pi = (G_\pi U \cap V) \cap G_\pi = V \cap G_\pi \trianglelefteq G_\pi.$$

Так как $|G_\pi U| < |G|$, то G_π перестановочна с $U \cap \overline{V} = U \cap V$. Противоречие. Значит, $G_\pi U = G$.

Аналогичным образом устанавливаем, что $G_\pi V = G$. Но тогда $|G|_{\pi'} = |U|_{\pi'} = |V|_{\pi'}$. Пусть $G_\pi \cap U \trianglelefteq G_\pi$. Предположим, что $G_\pi \cap U = 1$. Следовательно, U — π'-группа, а $U \cap V$ квазидостижима в G. По лемме 3, $U \cap V \subseteq U_G$. Так как в случае $U \cap V = 1$ группа G, конечно, перестановочна с $U \cap V$, то $U_G \neq 1$. Пусть $G_\pi \cap U \neq 1$. Тогда $(G_\pi \cap U)^G = (G_\pi \cap U)^{G_\pi U} \subseteq U$. Итак, в любом случае U содержит нормальную в G подгруппу $N \neq 1$. Так как индексы подгрупп G_π и V в $G = G_\pi V$ взаимно просты, то по лемме 4, $N = N_\pi L$, где $N_\pi = G_\pi \cap N$, $L = V \cap N$. Группа G/N удовлетворяет условию теоремы в отношении подгрупп U/N и VN/N и S_π-подгруппы $G_\pi N/N$. Действительно, $U/N \cap VN/N = (U \cap V)N/N$ π'-квазидостижима в G/N по лемме 5, U/N и VN/N перестановочны с $G_\pi N/N$; $U/N \cap G_\pi N/N \trianglelefteq G_\pi N/N$. Так как $|G/N| < |G|$, то $G_\pi N/N$ перестановочна с $U/N \cap VN/N$, откуда следует: $G_\pi NN(U \cap V) = G_\pi(N_\pi L)(U \cap V) = (G_\pi N_\pi)(L(U \cap V)) = G_\pi(U \cap V)$ — группа. К такому же результату приходим, предположив $V \cap G_\pi \trianglelefteq G_\pi$. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$, G_π — холлова π-подгруппа G. Если $U \cap G_\pi \trianglelefteq G_\pi$ (или $V \cap G_\pi \trianglelefteq G$), $U \cap V$ π'-квазидостижима в G, а G_π перестановочна с U и V, то G_π перестановочна с $U \cap V$.*

Следствие 2.1 обобщает следствия 4–5 из [3] и теорему C из [5].

Abstract. Let G be a finite group with a Hall π-subgroup G_π, U and V subgroups of G. Conditions to ensure that G_π is reduced into $U \cap V$ if G_π reduces into U and V are studied in the paper. A new information concerning generalized accessible embedding of $U \cap V$ into G and concerning permutability of G_π with $U \cap V$ have been obtained.

Литература

1. J.Shamash, *On the Carter sugroup of a soluble group*, Math.Z. **109** (1969), 288–310.

2. K.Doerk, *Eine Bemerkung über das Reduzieren von Hallgruppen in endlichen auflösbaren Gruppen*, Arch.Math. **60** (1993), 505–507.

3. Л.М.Белоконь, *О перестановочности подгрупп в конечных группах*, Известия Гомельского госуниверситета, №5(14) (2002), 88–91.

4. Л.А.Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

5. A.Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos, *Pemutability in finite soluble groups*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **115** (1993), 393–396.

6. O.Kegel, *Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt echthalten*, Arch. Math. **30**:**3** (1978), 225–228.

7. O.Kegel, *Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen*, Math.Z., **78** (1962), 205–221.

8. H.Wielandt, *Topics in the theory of composite groups* (Lecture Notes, Mathematics Department, University of Wisconsin, Madison, 1967).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

9. А.П.Кохно, *О конечных группах с пронормальными $\mathfrak{F}$-нормализаторами*, в книге: *Подгрупповое строение конечных групп,* Минск, Наука и техника, 1981, с. 39–44.

Могилевский государственный
университет продовольствия

Поступило 04.07.03

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ