Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

О конечных группах с $\mathfrak{F}$-достижимыми силовскими подгруппами

А.И.Прокопенко

В [1] исследовался вопрос о строении группы G, обладающей системой примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Наряду с $\mathfrak{F}$-субнормальностью другим известным обобщением субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости, введенное Кегелем в работе [2].

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Напомним [2–3], что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-достижимой, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in$ $\in \mathfrak{F}$.

Нам понадобятся следующие известные свойства $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп.

Лемма 1. ([3], лемма 3.1.1). *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа из G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;

2) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G;

3) если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;

4) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K и K — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

Лемма 2 ([3], лемма 3.1.2). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Пусть H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда:*

1) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то HN — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, а HN/N — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N;

2) если $N \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-достижима в G тогда и только тогда, когда H/N — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N.

Пусть $RN(\mathfrak{F}) = (G|$ в G любая силовская подгруппа является $\mathfrak{F}$-достижимой).

Предложение. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $RN(\mathfrak{F})$ — формация.*

Доказательство. Покажем, что $RN(\mathfrak{F})$ — гомоморф.

Пусть $G \in RN(\mathfrak{F})$, $N \triangleleft G$. Рассмотрим факторгруппу G/N. Если R/N — произвольная силовская p-подгруппа группы G/N, то $R/N = PN/N$ для некоторой силовской p-подгруппы P группы G. Так как P $\mathfrak{F}$-достижима в G, то по лемме 2 $PN/N = R/N$ $\mathfrak{F}$-достижима в G/N. Значит, $G/N \in RN(\mathfrak{F})$, то есть $RN(\mathfrak{F})$ — гомоморф.

Возьмем $G/N_1 \in RN(\mathfrak{F})$, $G/N_2 \in RN(\mathfrak{F})$ для $N_i \triangleleft G$, i=1,2. Покажем, что $G/N_1 \cap$ $\cap N_2 \in RN(\mathfrak{F})$ индукцией по $|G|$. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G/N_i \in RN(\mathfrak{F})$, $i = 1, 2$, но $G/N_1 \cap N_2 \notin RN(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $N_1 \cap N_2 \neq 1$. Возьмем L — минимальную нормальную подгруппу группы G, содержащуюся в $N_1 \cap N_2$. Имеем $G/L/N_1/L \simeq G/N_1 \in RN(\mathfrak{F})$ и $G/L/N_2/L \simeq$ $\simeq G/N_2 \in RN(\mathfrak{F})$. Тогда $G/L/(N_1/L \cap N_2/L) = G/L/(N_1 \cap N_2)/L \simeq G/N_1 \cap N_2$. Так как

$|G/L| < |G|$, то $G/L/(N_1/L \cap N_2/L) \in RN(\mathfrak{F})$ и, следовательно, $G/N_1 \cap N_2 \in RN(\mathfrak{F})$. Противоречие.

Таким образом, $N_1 \cap N_2 = 1$.

Возьмем минимальные нормальные подгруппы L_1 и L_2 из группы G, содержащиеся в N_1 и N_2 соответственно. Имеем $G/L_1/N_1/L_1 \simeq G/N_1$ и $G/L_1/N_2L_1/L_1 \simeq G/N_2L_1 \simeq$ $\simeq G/N_2/N_2L_1/N_2 \in RN(\mathfrak{F})$, так как $G/N_2 \in RN(\mathfrak{F})$ и $RN(\mathfrak{F})$ — гомоморф. Тогда $G/L_1/(N_2L_1/L_1 \cap N_1/L_1) = G/L_1/(N_2L_1 \cap N_1)/L_1 \simeq G/(N_2L_1 \cap N_1) = G/L_1(N_2 \cap N_1) =$ $= G/L_1 \in RN(\mathfrak{F})$. Аналогично, $G/L_2 \in RN(\mathfrak{F})$.

Значит, N_1 и N_2 можно взять минимальными нормальными подгруппами в G.

Пусть P — произвольная силовская p-подгруппа группы G, тогда PN_1/N_1 — силовская p-подгруппа в $G/N_1 \in RN(\mathfrak{F})$. Поэтому PN_1/N_1 является $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой в G/N_1. Аналогично, PN_2/N_2 — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа в G/N_2. Тогда по лемме 2 PN_1 и PN_2 будут $\mathfrak{F}$-достижимыми подгруппами группы G. По свойству силовских p-подгрупп имеем $PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2) = P$. Значит, по лемме 1 получаем, что P является $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G, то есть $G \in RN(\mathfrak{F})$. Предложение доказано.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G, у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в G;

2) любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо бипримарной метанильпотентной группой, либо группой простого порядка.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть $M(\mathfrak{F})$ — множество всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп. Докажем вначале, что $M(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Предположим, что множество $(M(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}) \setminus \mathfrak{N}^2 \neq \varnothing$, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{N}^2$ — насыщенная формация, то $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = [N]M$, где $N = G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $|N| = p^\alpha$, p — простое число и M — некоторая максимальная подгруппа группы G. Из $N = C_G(N) = F(G)$ следует, что M ненильпотентна. Пусть P — некоторая силовская подгруппа группы G, тогда PN — собственная подгруппа группы G. Так как PN $\mathfrak{F}$-достижима в G и P $\mathfrak{F}$-достижима в PN, то P $\mathfrak{F}$-достижима в G. Получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие с выбором группы G. Значит, $M(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Пусть $G \in M(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$.

Если G нильпотентна, то G — примарная группа. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что G — группа простого порядка.

Предположим, что G ненильпотентна. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\Phi(G) = 1$, $G = [N]M$, где $N = G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $|N| = p^\alpha$, p — простое число, M — некоторая максимальная подгруппа группы G.

Так как $G \in \mathfrak{N}^2$, то M является нильпотентной. Значит, $M = M_{p_1} \times M_{p_2} \times \ldots \times$ $\times M_{p_n}$, где M_{p_i} — силовская подгруппа группы M, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда через $H_i = NM_{p_i}$ обозначим собственную подгруппу группы M, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $G \in M(\mathfrak{F})$, то $H_i \in \mathfrak{F}$. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По лемме 4.5 из [5] имеем $H_i/F_p(H_i) \in f(p)$, то есть $NM_{p_i}/F_p(H_i) \in f(p)$. Из $O_{p'}(H_i) \subseteq$ $\subseteq C_{H_i}(N) \subseteq C_G(N) = N$ следует, что $C_{H_i}(N) = N$ и $O_{p'}(H_i) = 1$. Значит, $F_p(H_i)$ — p-группа. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то по теореме 3.3 из [5] имеем $f(p) =$ $= \mathfrak{N}_p f(p)$ и $H_i/F_p(H_i) \in f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Отметим, что $F_p(H_i) \triangleleft H_i$ и $N \subseteq F_p(H_i)$. Тогда $H_i/N/F_p(H_i)/N \simeq H_i/F_p(H_i) \in f(p)$ и, следовательно, $H_i/N \in f(p)$. Имеем, $M_{p_i}N/N \simeq$

$\simeq M_{p_i} \in f(p)$. Отсюда $M \in f(p)$. Значит, $G/C_G(N) = G/N \simeq M \in f(p)$, $G/N \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $n = 1$. Получаем, что $M = M_{p_1}$ и группа G является бипримарной.

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Допустим противное. Пусть группа G — контрпример минимального порядка. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, в G любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима, но G формации $\mathfrak{F}$ не принадлежит. Из того, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что любая силовская подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$. Очевидно, что любая примарная подгруппа из G является $\mathfrak{F}$-достижимой в G. Из теоремы Силова и выбора группы G получаем, что $G \in M(\mathfrak{F})$. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ по выбору группы G. Так как $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией, то $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$, то G разрешима. Тогда G является бипримарной метанильпотентной группой. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 1.5 из [4] $G = [N]M$, где $N = G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $|N| = p^{\alpha}$, p — простое число и M — минимальная не $f(p)$-группа. Отметим, что M является силовской q-подгруппой и максимальной $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппой группы G. С другой стороны, M является $\mathfrak{F}$-нормальной подгруппой в G. Противоречие. Теорема доказана.

Abstract. Finite groups with $\mathfrak{F}$-accessible Sylow subgroups are investigated.

Литература

1. А. Ф. Васильев, *О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение конечных групп*, Вопросы алгебры, Гомель, Изд-во Гомельского университета, № 8 (1995), 31–39.

2. O. H. Kegel, *Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten* Arch. Math., **30**, No. 3 (1978), 225–228.

3. С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Мінск, Бел. навука, 2003.

4. В. Н. Семенчук, *Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы*, Алгебра и логика, № 3 (1979), 348–382.

5. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 06.10.04