Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 517.538.52+517.538.53

Об экстремальном свойстве квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде

А.П. Старовойтов

Изучаются экстремальные свойства квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=0}^{2}$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна и Ф. Вилонского.
Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде I типа, квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства, метод перевала.

The extreme properties of diagonal quadratic Hermite – Padé approximants of type I for exponential system $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=0}^{2}$ with arbitrary real $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ are studied. The proved theorems complement the known results of P. Borwein and F. Wielonsky.
Keywords: Hermite – Padé approximants of type I, quadratic Hermite – Padé approximants, asymptotic equality, saddle-point method.

Введение. Диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) и $(n-1)$-го порядка для набора экспонент $\left\{e^{pz}\right\}_{p=0}^{k}$ называют $k+1$ многочлен $A_0(z), A_1(z),..., A_k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \ \ z \to 0, \tag{1.1}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

Такие аппроксимации введены в рассмотрение Эрмитом [1] в 1883 году. Ещё раньше, при доказательстве трансцендентности числа e, Эрмит [2], [3] определил $k+1$ многочлен $Q_{kn}(z), P_{kn}^1(z),..., P_{kn}^k(z)$ степени не выше kn, для которых

$$R_n^j(z) := Q_{kn}(z)e^{jz} - P_{kn}^j(z) = O(z^{kn+n+1}), \ \ z \to 0. \tag{1.2}$$

Набор рациональных функций $\pi_{kn,kn}^j(z;e^{j\xi}) = P_{kn}^j(z)/Q_{kn}(z), \ \ j = 1, 2,..., k$ принято называть диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде II типа (German type) n-го порядка (по поводу терминологии см. [4]). В [5] показано, что с помощью аппроксимаций Эрмита – Паде I типа также можно доказать трансцендентность числа e.

В одномерном случае ($k=1$) общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1.1), (1.2), принадлежит Паде [6], а построенные в обоих случаях многочлены совпадают. В многомерном случае ($k \ge 2$) систематическое изучение аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов было начато в работах К. Малера [4], [5] (об участии других авторов в создании формальной теории см. [7], [8]). Оба типа аппроксимаций Эрмита – Паде, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений [8], [9]–[13].

При $k=1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде. В этом случае $A_0(z) = -P_{n-1}^1(z)$, $A_1(z) = Q_{n-1}(z)$, и хорошо известно, что аппроксимации Паде $\pi_{n,n}(z;e^{\xi}) = P_n^1(z)/Q_n(z)$ обладают рядом экстремальных свойств, в частности, являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями e^z.

В данной статье рассматриваются квадратичные ($k=2$) диагональные аппроксимации Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\right\}$ с произвольными различными действительными показателями $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$. Для многочленов $A_n^0(z), A_n^1(z), A_n^2(z)$ степени не выше $n-1$, удовлетворяющих условиям

$$R_n(z)=\sum_{p=0}^{2}A_n^p(z)e^{\lambda_p z}=O(z^{3n-1}),\ \ z\to 0, \tag{1.3}$$

найдена асимптотика остаточного члена $R_n(z)$ и установлено, что нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\left\{A_n^p(z)\right\}_{p=0}^{2}$ являются решением следующей экстремальной задачи:

при заданном n *найти многочлены* $a_n^p(z)$, $p=0,1,2$ *степени не выше* n, *со старшим коэффициентом многочлена* $a_n^2(z)$ *равным* 1, *реализующие минимум в следующем равенстве*

$$E_n=E_n(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2;\rho)=\min_{\left\{a_n^p(z)\right\}_{p=0}^{2}}\left\|\sum_{p=0}^{2}a_n^p(z)e^{\lambda_p z}\right\|_\rho, \tag{1.4}$$

где $\|h\|_\rho=\max\left\{|h(z)|:z\in D_\rho\right\}$, *а* $D_\rho=\left\{z:|z|\le\rho\right\}\subset\mathbb{C}$.

Поскольку найти точные значения E_n не представляется возможным, конечной целью задачи является нахождение асимптотики убывания последовательности $\left\{E_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

При $k=2$ и $\lambda_p=p$, $p=0,1,...,k$ для $\rho=1$ данная задача была поставлена и решена П. Борвейном [14]. Ф. Вилонский [15] исследовал случай, когда $k\ge 2$ и $\rho<\pi/k$. Ранее при $k=1$ решение близкой по содержанию задачи для круга и отрезка получено Л. Трефезеном [17] и Д. Браессом [16].

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$, *а* $\rho<\pi/\lambda_2$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$E_n\sim\frac{n!\,\lambda_2^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}}{(3n+2)!}\rho^{3n+2}.$$

Теорема 1 является обобщением теорем П. Борвейна [14] и Ф. Вилонского [15] при $k=2$. Она получена в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений остаточного члена $R_n(z)$ и многочленов $A_n^p(z)$. Заметим, что асимптотические свойства остаточных членов $R_n^j(z)$ аппроксимаций Эрмита – Паде II типа описаны с помощью метода Лапласа в работах автора [18], [19]. В данном случае применяются эффективный для такого анализа метод перевала в сочетании с методом Лапласа. Причём технология их применения является результатом синтеза методов работ [15], [19].

Предварительные результаты. Полиномы $A_n^0(z), A_n^1(z), A_n^2(z)$, удовлетворяющие равенствам (1.3), могут быть получены решением линейной системы $3n-1$ однородных уравнений с $3n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные точки λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ – граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все точки λ_j, $j=0,1,2$ принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z)=\frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int_{C_p}\frac{e^{\xi z}d\xi}{\left[\varphi(\xi)\right]^n},\ \ 0\le p\le 2, \tag{2.1}$$

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty}\frac{e^{\xi z}d\xi}{\left[\varphi(\xi)\right]^n}, \tag{2.2}$$

где $\varphi(\xi)=\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)$, удовлетворяют (1.3) и всем другим условиям.

Далее будем рассматривать нормированную функцию $R_n(z)$, полученную делением $R_n(z)$ на старший коэффициент многочлена $A_n^2(z)$. Чтобы найти его численное значение, продифференцируем $n-1$ раз равенство (2.1) при $p=2$. В результате получим, что значение старшего коэффициента $A_n^2(z)$ совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i(n-1)!}\int_{C_2}\frac{d\xi}{(\xi-\lambda_2)\xi^n(\xi-\lambda_1)^n},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно $\lambda_2^{-n}(\lambda_2-\lambda_1)^{-n}/(n-1)!$.

При изучении асимптотики интеграла в (2.2) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые утверждения [20, с. 398, 415].

Утверждение 1 (Метод Лапласа). *Пусть* $f(x)$, $S(x)$ *непрерывные на отрезке* $[a,b]$ *функции, при этом* $S(x)$ *принимает только действительные значения, а* $f(x)$ *может быть комплекснозначной. Полагаем*

$$I_n=\int_a^b f(x)e^{nS(x)}dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ *в точке* $x_0\in(a,b)$ *имеет абсолютный максимум на отрезке* $[a,b]$, *т.е.* $S(x)<S(x_0)$, $x\neq x_0$, $S''(x_0)\neq 0$, *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $n\to+\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$I_n=\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}}e^{nS(x_0)}(f(x_0)+O(1/n)).$$

Утверждение 2 (Метод перевала). *Пусть функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *регулярны в некоторой области* G, *содержащей кусочно-гладкую кривую* γ *и*

$$F_n=\int_\gamma f(\xi)e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Предположим, что $\max\limits_\gamma \operatorname{Re} S(\xi)$ *достигается только в точке* z_0, *которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т.е.* $S'(z_0)=0$, $S''(z_0)\neq 0$. *Считаем также, что в окрестности* z_0 *контур* γ *проходит через оба сектора (см. [20], стр. 414), в которых* $\operatorname{Re} S(\xi)<\operatorname{Re} S(z_0)$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$F_n=\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}}e^{nS(z_0)}(f(z_0)+O(1/n)). \tag{2.3}$$

Выбор ветви корня в (2.3) определяется из условий

$$\arg\sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}}=\varphi_0,$$

где φ_0- *угол между касательной к кривой* l *в точке* z_0 *и положительным направлением действительной оси, а* $l-$ *линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* z_0, *т.е. для* l *в окрестности* z_0 *выполняются условия:* $\operatorname{Im} S(z)=\operatorname{Im} S(z_0)$ *при* $z\in l$; $\operatorname{Re} S(z)<\operatorname{Re} S(z_0)$ *при* $z\in l$, $z\neq z_0$.

Асимптотика остаточного члена $R_n(z)$

При $\xi\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_j\}_{j=0}^2$ и некотором $w\in\mathbb{C}$ рассмотрим однозначную функцию

$$S(\xi)=w\xi-\ln\varphi(\xi),$$

где $\ln\varphi(\xi)=\ln|\varphi(\xi)|+i\arg_0\varphi(\xi)$ – главная ветвь логарифма, т.е. $\arg_0\varphi(\xi)\in(-\pi,\pi]$. В области её определения

$$S'(\xi) = w - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = \omega - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - \lambda_1} - \frac{1}{\xi - \lambda_2},$$

$$S''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_2)^2}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Равномерно по* z *на компактах в* $\mathbb{C}$ *при* $n \to \infty$

$$R_n(z) \sim \frac{e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}z}}{(3n-1)!} z^{3n-1}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Возьмём произвольное число $z \in \mathbb{C}$ и представим $R_n(z)$ в виде

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} e^{\xi z - n \ln \varphi(\xi)} d\xi.$$

В этом равенстве сделаем замену $z = nw$. Тогда

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} e^{nS(\xi)} d\xi. \tag{3.2}$$

Будем искать критические точки функции $S(\xi)$, т.е. нули $S'(\xi)$. Они являются корнями уравнения

$$w\varphi(\xi) = \varphi'(\xi),$$

которое можно записать в виде

$$w = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - \lambda_1} + \frac{1}{\xi - \lambda_2} \tag{3.3}$$

Поскольку контур C_∞ должен охватывать все точки λ_j, то будем искать критическую точку достаточно удалённую от нуля. В этом случае, сделав замену $\zeta = 1/\xi$, представим правую часть равенства (3.3) в виде степенного ряда

$$w = 3\zeta + (\lambda_1 + \lambda_2)\zeta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\zeta^3 + \dots. \tag{3.4}$$

Обращая ряд (3.4) с использованием формул Бурмана – Лагранжа (см. [20], стр. 266), и возвращаясь к прежней переменной ξ, получим зависимость поведения критической точки ξ_0 от значений w, которые с учётом замены $z = nw$, находятся в достаточно малой окрестности нуля:

$$\xi_0 = \frac{3}{w} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} + O(w). \tag{3.5}$$

Для нахождения асимптотики интеграла (3.2) с помощью метода перевала необходимо определить такой контур C_∞, проходящий через ξ_0, чтобы он охватывал все точки $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ и функция $\operatorname{Re} S(\xi)$ достигала на C_∞ своего наибольшего значения в единственной точке ξ_0. С этой целью рассмотрим линии уровня функций $\varphi(\xi)$ и $e^{-w\xi}$, проходящие через точку ξ_0:

$$L = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : \left|\varphi(\xi)\right| = \left|\varphi(\xi_0)\right| \right\},$$

$$L_1 = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : \left|e^{-w\xi}\right| = \left|e^{-w\xi_0}\right| \right\}.$$

L является лемнискатой, а L_1 – прямой, проходящей через ξ_0 и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол равный $\arg(i/w)$. Уравнение лемнискаты L запишем в виде

$$\left| \varphi(\xi_0) + \frac{\varphi'(\xi_0)}{1!}(\xi - \xi_0) + \dots + \frac{\varphi'''(\xi_0)}{3!}(\xi - \xi_0)^3 \right| = \left|\varphi(\xi_0)\right|.$$

Опираясь на предыдущее соотношение и равенство $\varphi'(\xi_0) = w\varphi(\xi_0)$, легко показать, что угловой коэффициент касательной к L в точке ξ_0 равен $tg(\arg(i/w))$. Таким образом, L_1 является касательной к L в точке ξ_0.

При достаточно малых $|w|$ лемниската L является (см. [21], стр. 75) жордановой аналитической кривой и охватывает все нули $\varphi(\xi)$, а прямая L_1 разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых (полуплоскость Ω) содержит L. В полуплоскости Ω модуль $e^{-w\xi}$ больше модуля $e^{-w\xi_0}$, и, значит, при $\xi \in \Omega$ $\operatorname{Re}(w\xi) < \operatorname{Re}(w\xi_0)$. Кроме того, лемниската L разбивает плоскость на две связные области − внутреннюю и внешнюю. Если ξ принадлежит внешней области, то $|\varphi(\xi)| > |\varphi(\xi_0)|$, т.е. $-\ln|\varphi(\xi)| < -\ln|\varphi(\xi_0)|$.

Учитывая возможность деформирования контура интегрирования в интеграле (3.2), построим теперь необходимый контур C_∞. Для этого возьмём отрезок с центром в точке ξ_0, принадлежащий L_1, и соединим его концы жордановой кривой, которая лежит в полуплоскости Ω и охватывает L. Построенный контур C_∞ соответствует необходимым требованиям. В таком случае к интегралу (3.2) можно применить утверждение 2. В результате получим

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}}e^{nS(\xi_0)}(1+O(1/n)). \tag{3.6}$$

Точка ξ_0 достаточно далеко удалена от нуля. Поэтому

$$S(\xi_0) = w\xi_0 - 3\ln\xi_0 - \ln\left(1-\frac{\lambda_1}{\xi_0}\right) - \ln\left(1-\frac{\lambda_2}{\xi_0}\right) =$$

$$= w\xi_0 + 3\ln\frac{1}{\xi_0} + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\xi_0} + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right).$$

Отсюда и из (3.5) следует, что

$$S(\xi_0) = 3 + 3\ln\frac{w}{3} + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}w + O(w^2).$$

Поэтому

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{3n}\left(\frac{w}{3}\right)^{3n} e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}nw}(1+O(nw^2)).$$

Если перейти здесь от переменной w к z, то получим

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{3n}\left(\frac{z}{3n}\right)^{3n} e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}z}(1+O(z^2/n)). \tag{3.7}$$

Из полученного ранее выражения для $S''(\xi)$ следует, что

$$S''(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0^2}\left(1 + 2\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\xi_0} + O(1/\xi_0^2)\right).$$

Отсюда и из (3.5) находим, что

$$S''(\xi_0) = \frac{w^2}{3}(1+O(w)).$$

Поэтому

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{\frac{-3}{w^2}}(1+O(w)).$$

Если теперь учесть, что для выбранного контура C_∞ угол $\varphi_0 = \arg(i/w)$, и перейти к переменной z, то окончательно получим

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{3}\frac{i}{w}(1+O(w)) = i\sqrt{3}\frac{n}{z}(1+O(z/n)). \tag{3.8}$$

Из (3.6), (3.7) и (3.8) следует, что

$$R_n(z) = \sqrt{\frac{3n}{2\pi}}\left(\frac{e}{3n}\right)^{3n} z^{3n-1}e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}z}(1+O(1/n)).$$

Отсюда, с учётом формулы Стирлинга, вытекает справедливость асимптотического равенства (3.1) для любого комплексного числа z.

Равномерность асимптотики в (3.1) следует из теоремы Витали (см. [22], стр. 371) и того, что последовательность функций $(3n-1)!e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z/3}R_n(z)/z^{3n-1}$ равномерно ограничена по модулю на компактах в $\mathbb{C}$. Действительно,

$$\left|R_n(nw)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} e^{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))}\left|\zeta'(t)\right|dt, \tag{3.9}$$

где контур интегрирования C_∞ прежний и параметризуется вещественным параметром $t\in[\alpha,\beta]$. Для нахождения асимптотики интеграла в (3.9) применим утверждение 1. В результате получим, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))}\left|\zeta'(t)\right|dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n[\operatorname{Re}S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}}\,e^{nS(\xi_0)}\left|\zeta'(t_0)\right|(1+O(1/n)), \tag{3.10}$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0)=\xi_0$.

Функция $\operatorname{Re}S(\zeta(t))$ в точке t_0 имеет максимум. Поэтому

$$\left[\operatorname{Re}S(\zeta(t))\right]''_{t=t_0} = S''(\xi_0)\left[\zeta'(t_0)\right]^2 < 0. \tag{3.11}$$

Из равенств (3.10) и (3.11), переходя к переменной z и учитывая соотношения (3.7), (3.8), получим необходимое неравенство

$$\left|R_n(z)\right| \le \frac{|z|^{3n-1}}{(3n-1)!}\left|e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}z}\right|(1+O(1/n)).$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Вслед за Д. Браессом [16] рассмотрим сдвиг аппроксимаций Эрмита – Паде n-го порядка. Пусть

$$\tilde{a}_n^p(z) = n!\lambda_2^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}A_{n+1}^p(z-z_n),\ \ 0\le p\le 2,$$
$$\tilde{R}_n(z) = n!\lambda_2^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}R_{n+1}(z-z_n),\quad E_n^* = \left\|\tilde{R}_n\right\|_\rho,$$

где

$$z_n = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\rho^2}{3(3n+2)},$$

а множитель $n!\lambda_2^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}$ в приведённых выше формулах нормализует многочлен $\tilde{a}_n^p(z)$ так, что его старший коэффициент равен 1.

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующих лемм.

Лемма 1. *При* $n\to\infty$

$$E_n^* \sim \frac{n!\lambda_2^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}}{(3n+2)!}\rho^{3n+2}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Из теоремы 2 при $n\to\infty$ имеем, что

$$R_{n+1}(z-z_n) = \frac{e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}(z-z_n)}}{(3n+2)!}(z-z_n)^{3n+2}(1+O(1/n)). \tag{4.2}$$

Принимая во внимание соотношение

$$(z-z_n)^{3n+2} \sim z^{3n+2}e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}\frac{\rho^2}{z}},$$

из (4.2) для $|z|=\rho$ получим, что при $n\to\infty$

$$R_{n+1}(z-z_n) \sim \frac{\rho^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

Отсюда и определения E_n^* следует (4.1). Лемма 1 доказана.

Лемма 1. *При* $\rho < \pi / \lambda_2$ *и достаточно больших* n *справедливо равенство* $E_n = E_n^*$.

Доказательство. Воспользуемся методом из работы [14]. Достаточно показать, что $E_n^* \le E_n$ при больших n. Предположим, что это не так. Тогда $E_n < E_n^*$, и, следовательно, найдутся многочлены $a_n^p(z)$, $p = 0, 1, 2$, $\deg a_n^p(z) \le n$, $a_n^2(z)$ имеет старший коэффициент равный 1, такие, что

$$\left\| \sum_{p=0}^{2} a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_\rho < \left\| \sum_{p=0}^{2} \tilde{a}_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_\rho .$$

Отсюда и из полученных при доказательстве леммы 1 асимптотических равенств следует, что при достаточно больших n для $|z| = \rho$

$$\left| \sum_{p=0}^{2} a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right| < \left| \sum_{p=0}^{2} \tilde{a}_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right|.$$

Тогда по теореме Руше функция

$$\sum_{p=0}^{2} (a_n^p(z) - \tilde{a}_n^p(z)) e^{\lambda_p z}$$

имеет в D_ρ по крайней мере $3n+2$ нуля. Но это не так. Действительно, рассмотрим многочлены $b_n^p(z) = a_n^p(z) - \tilde{a}_n^p(z)$, $p = 0, 1, 2$. Сумма степеней этих многочленов $h \le 3n-1$. Известно (см. [23], задача 206.2, стр. 144), что функция $\sum_{p=0}^{2} b_n^p(z) e^{\lambda_p z}$ в круге D_ρ может иметь не более чем $h + 2 + \lambda_2 \rho / \pi$ нулей. Поскольку $\rho < \pi / \lambda_2$, то число таких нулей не больше чем $3n+1$. Полученное противоречие доказывает лемму 2. Лемма 2 доказана.

Литература

1. Hermite, C. Sur la generalisation des fractions continues algebriques / C. Hermite// Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2 A − 1883. − V. 21. − P. 289−308.
2. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci.(Paris) − 1873. − V. 77. − P. 18−293.
3. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1 / Ф. Клейн. − М. : Наука, 1933. – 432 с.
4. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. − 1968. − V. 19. − P. 95−166.
5. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. − 1931. − V. 166. − P. 118−150.
6. Padé, H. Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential // Ann. Ecole Norm. Sup. Paris. − 1899. − V. 16. № 3. − P. 394−426.
7. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite – Pade polynomials, in «Progress in Approximation Theory» (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) − P. 127−167 / A.I. Aptekarev, H. Stahl. − New York / Berlin : Springer – Verlag, 1992. – P. 127−167.
8. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. − 2011. − Т. 66, № 6(402) − С. 37−122.
9. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. − 1967. − V. 1668. − P. 200−227.
10. Chudnovsky, G.V. Hermite – Pade approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π,in «Lecture Notes in Math». − V. 925. − P. 299−322 / G.V. Chudnovsky. − New York / Berlin : Springer-Verlag, 1982. – P. 299−322.
11. Аптекарев, А.И. Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сборник статей. Совр. пробл. матем. Т. 9 / А.И. Аптекарев (ред.) − М. : МИАН, 1988. – С. 1−82.
12. Калягин, В.А. Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. − 1994. − Т. 185, № 6. − С. 79−100.

13. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. − 2002. − Т. 57, № 1 − С. 45−142.

14. Borwein, P.B. Quadratic Hermite – Pade approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. − 1986. − V. 62. − P. 291−302.

15. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Pade Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. − 1997. − V. 90, № 2. − P. 283−298.

16. Braess, D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z // J. Approx. Theory. − 1984. − V. 40, №4. − P. 375−379.

17. Trefethen, L.N. The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk // J. Approx.Theory. − 1984. − V. 40, № 4. − P. 380−384.

18. Старовойтов, А.П. Асимптотика эрмитовой аппроксимации экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. − 2012. − № 5(74). − С. 163−171.

19. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. − 2013. − № 1(14). − С. 81−87.

20. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного/ Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. − М.: Наука, 1989. . – 480 с.

21. Уолш, Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области / Дж. Л. Уолш. − М. : Изд-во иностр. литер., 1961. – 508 с.

22. Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций. Том 1. / А.И. Маркушевич. − М. : Наука, 1967. . – 486 с.

23. Polya, G. Problems and Theorems in Analysis. Vol. 1. / G. Polya, G. Szegö. − Berlin : Springer-Verlag, 1972. – 419 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.05.2014