Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Описание элементов высоты 3 решетки S-замкнутых ω-насыщенных формаций конечных групп

И.М.Близнец

Все рассматриваемые нами группы конечны.

Мы используем стандартную терминологию [1–4]. Кроме того, нам будут необходимы некоторые определения и обозначения из работы А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [5] и понятие подгруппового функтора, введенное А.Н.Скибой в монографии [2].

Напомним, что подгрупповой функтор Скибы сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место

$$H^{\varphi} \in \tau(B) \text{ и } T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A).$$

В дальнейшем τ обозначает некоторый фиксированный подгрупповой функтор Скибы. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой [2], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Далее ω — некоторое множество простых чисел. Согласно [5], всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называется ω-локальным спутником. Пусть $G_{\omega d}$ означает наибольшую нормальную подгруппу N в G такую, что $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из N ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G) = \varnothing)$.

Для произвольного спутника f символ $LF_{\omega}(f)$ обозначает [5] класс

$$\{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, то говорят, что она ω-насыщена и f — ω-локальный спутник этой формации. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется внутренним спутником формации $\mathfrak{F}$.

Пересечение всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначается через $\tau^{\omega}\operatorname{form}(\mathfrak{X})$ и называется τ-замкнутой ω-насыщенной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формация $\tau^{\omega}\operatorname{form}(\mathfrak{X})$ называется однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формацией. Если $\tau = S$, то мы пишем $s^{\omega}\operatorname{form}(\mathfrak{X})$.

Если τ-замкнутые ω-насыщенные формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таковы, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и не существует такой τ-замкнутой ω-насыщенной формации $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называется максимальной τ-замкнутой ω-насыщенной подформацией в $\mathfrak{F}$.

Символом $\tau\operatorname{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех таких τ-замкнутых формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты n решетки всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, когда n — точная верхняя грань длин цепей

$$\varnothing = \mathfrak{F}_0 \subset (1) = \mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_{n-1} \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F},$$

в которой $\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутая ω-насыщенная формация при $i = 0, \ldots, n$.

Теорема 1 (см. [6]). *Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 2 решетки всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, когда $\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\operatorname{form} G$, где G — либо неединичная p-группа для некоторого $p \in \omega$, либо некоторая простая ω'-группа с условием $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$.*

Теорема 2 (см.[6]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, когда $\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\operatorname{form} G$, где либо $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 — такие неизоморфные простые группы, что $\tau(A_i) \subseteq \{1, A_i\}$ и при p, делящем $|A_i|$, где $p \in \omega$, имеет место $|A_i| = p$, либо G — такая монолитическая группа с цоколем R, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева группа и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами, причем $\pi(R) \cap \omega = \{p\}$ для некоторого $p \in \omega$;

2) $R \neq G$ — ω'-группа, $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ для некоторого числа $p \in \omega$ и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами;

3) G — циклическая примарная группа порядка p^2, где $p \notin \omega$;

4) G — неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;

5) $R \nsubseteq \Phi(G)$, $\pi(G) \cap \omega = \varnothing$, и найдется такая простая группа A с условием $\tau(A) \subseteq \{1, A\}$, что всякая неединичная группа из $(\tau(G) \setminus \{G\}) \cup \{G/R\}$ имеет вид

$$A_1 \times \ldots \times A_t,$$

где $t \geqslant 1$, $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$, причем либо $R \neq G$, либо $R = G$ — простая группа с $\tau(G) \nsubseteq \{1, G\}$.

Основываясь на приведенные выше теоремы 1, 2, в настоящей работе описываются τ-замкнутые ω-насыщенные формации высоты $\leqslant 3$ в случае, когда $\tau(G)$ — множество всех подгрупп группы G для любой группы G.

Лемма 1. *Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 2 решетки всех S-замкнутых ω-насыщенных формаций, когда $\mathfrak{F} = s^{\omega}\operatorname{form} G$, где G — группа простого порядка.*

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме 1 $\mathfrak{F} = s^{\omega}\operatorname{form} G$, где G — либо неединичная p-группа для некоторого $p \in \omega$, либо некоторая простая ω'-группа с условием $S(G) \subseteq \{1, G\}$.

Предположим, что G — неединичная p-группа, где $p \in \omega$. Тогда, очевидно,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p = s^{\omega}\operatorname{form} Z_p,$$

где Z_p — группа простого порядка p.

Пусть теперь G — такая простая ω'-группа, что $S(G) \subseteq \{1, G\}$. Тогда G, очевидно, является группой простого порядка.

Достаточность. Пусть G — группа простого порядка q, $\mathfrak{F} = s^{\omega}\operatorname{form} G$. Тогда $S(G) \subseteq \{1, G\}$ и поэтому, согласно теореме 1 $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 2.

В случае, когда $\tau(G)$ — множество всех подгрупп группы G для любой группы G, из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки всех S-замкнутых ω-насыщенных формаций, когда $\mathfrak{F} = s^{\omega}\operatorname{form} G$, где либо G — абелева группа порядка pq, где p и q различные простые числа, либо G — одна из следующих монолитических групп:*

1) G — циклическая примарная группа порядка p^2, где $p \notin \omega$;

2) G *— неабелева группа порядка* p^3 *простой нечетной экспоненты* $p \notin \omega$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки всех S-замкнутых ω-насыщенных формаций, то согласно теореме 2 формация $\mathfrak{F} = s^\omega \operatorname{form} G$, где либо $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 — такие неизоморфные простые группы, что $S(A_i) \subseteq \{1, A_i\}$ и при p, делящем $|A_i|$, где $p \in \omega$, имеет место $|A_i| = p$, либо G — такая монолитическая группа с цоколем R, что выполняется одно из следующих условий:

а) $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева группа и все собственные подгруппы группы G являются p-группами, причем $\pi(R) \cap \omega = \{p\}$ для некоторого $p \in \omega$;

б) $R \neq G$ — ω'-группа, $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ для некоторого числа $p \in \omega$ и все собственные подгруппы группы G являются p-группами;

в) G — циклическая примарная группа порядка p^2, где $p \notin \omega$;

г) G — неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;

д) $R \nsubseteq \Phi(G)$, $\pi(G) \cap \omega = \varnothing$, и найдется такая простая группа A с условием $S(A) \subseteq \{1, A\}$, что всякая неединичная группа из $(S(G) \setminus \{G\}) \cup \{G/R\}$ имеет вид

$$A_1 \times \ldots \times A_t,$$

где $t \geqslant 1$, $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$, причем либо $R \neq G$, либо $R = G$ — простая группа с $S(G) \nsubseteq \{1, G\}$.

Прежде предположим, что $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 — такие неизоморфные простые группы, что $S(A_i) \subseteq \{1, A_i\}$ и при p, делящем $|A_i|$, где $p \in \omega$, имеет место $|A_i| = p$. Тогда, рассуждая, как и при доказательстве леммы 1, видим, что A_1 и A_2 — группы простых порядков p и q соответственно, причем, поскольку A_1 и A_2 — неизоморфные простые группы, то $p \neq q$. Значит, G — абелева группа порядка pq, где p и q — различные простые числа.

Пусть теперь G — такая монолитическая группа, что выполняется условие а). Тогда, поскольку R — неабелева группа, то она не является p-группой. Следовательно, группа R не является собственной подгруппой группы G. Поэтому, $R = G$ — простая неабелева группа. Значит, $|\pi(G)| > 1$. Пусть Q — силовская q-подгруппа в G, где $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда $Q \neq G$ и Q не является p-группой. Таким образом, данный случай невозможен.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию б). Поскольку R — ω'-группа, а все собственные подгруппы группы G являются p-группами, где $p \in \omega$, то $R = G$ — простая ω'-группа. Противоречие. Таким образом, данный случай также невозможен.

Случаи, когда группа G удовлетворяет условиям в) и г), совпадают с условиями 1) и 2) следствия соответственно.

Пусть теперь относительно группы G выполняется условие д). Как и выше ясно, что A — группа простого порядка, скажем p. Значит, всякая неединичная группа из $(S(G) \setminus \{G\}) \cup \{G/R\}$ является p-группой. Это означает, что G — p-группа. Так как по условию $R \nsubseteq \Phi(G)$ и R — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\Phi(G) = 1$. Поэтому G — элементарная абелева p-группа, а значит, $G = R$ — группа порядка p. Противоречие. Итак, данный случай невозможен.

Достаточность непосредственно вытекает из теоремы 2.

Abstract. In this paper S-closed ω-saturated formations of the height at most 3 are described.

Литература

1. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1992.

2. А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Мінск, Беларуская навука, 1997.

3. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

4. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.

5. А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, *Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп*, Математические труды, **2**, № 1 (1999), 114–147.

6. И. М. Близнец, *Об элементах высоты 3 решетки τ-замкнутых ω-локальных формаций*, Доклады НАН Беларуси, **47**, № 2 (2003), 50–53.

7. В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Гомель, Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, 2003.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 05.10.04