Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

О тотально насыщенных формациях конечной длины

В.Г.Сафонов

В работе рассматриваются только конечные группы. Мы придерживаемся терминологии, принятой в монографиях [1–3].

Основные понятия, а также фундаментальные результаты теории тотально насыщенных формаций изложены в монографиях [2,3]. Там же был поставлен ряд открытых вопросов, касающихся тотально насыщенных формаций.

Изучению свойств решетки тотально насыщенных формаций посвящены работы [4–8]. Так, С.Ф.Каморниковым [4] были описаны тотально насыщенные формации, все тотально насыщенные подформации которых наследственны. В работе Н.Н.Воробьева [5] установлена индуктивность решетки всех тотально насыщенных формаций. Авторами работы [6] изучались тотально насыщенные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка тотально насыщенных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F}\bigcap\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$, является решеткой с дополнениями. Неоднопорожденные тотально насыщенные формации, у которых все собственные тотально насыщенные подформации однопорождены, были описаны в работе автора [7]. Как оказалось, такие формации — это в точности формации всех конечных разрешимых π-групп, где $|\pi| = 2$. Ряд новых свойств решетки тотально насыщенных формаций установлен автором в работе [8]. В частности, здесь доказаны модулярность и алгебраичность решетки всех тотально насыщенных формаций, описаны тотально насыщенные формации, у которых решетка тотально насыщенных подформаций является решеткой с дополнениями и др.

В данной заметке, основываясь на результатах работ [7,8], мы докажем, что для тотально насыщенной формации $\mathfrak{F}$ условие конечности длины решетки её тотально насыщенных подформаций $L_\infty(\mathfrak{F})$ равносильно условию конечности самой решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$, а также разрешимости и однопорожденности формации $\mathfrak{F}$.

Напомним некоторые из используемых определений и обозначений [2,3].

Всякую формацию конечных групп называют 0-кратно насыщенной. При $n \geqslant 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно насыщенной, если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого — $(n-1)$-кратно насыщенные формации. Формацию, n-кратно насыщенную для любого целого неотрицательного n, называют тотально насыщенной.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $l_\infty\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают тотально насыщенную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех тотально насыщенных формаций, содержащих класс групп $\mathfrak{X}$. При этом, если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формацию $l_\infty\mathrm{form}G$ называют однопорожденной тотально насыщенной формацией.

Относительно операций $\vee_\infty$ и $\bigcap$ совокупность всех тотально насыщенных формаций l_∞ является полной решеткой формаций (для любых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ из l_∞ полагают $\mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{H} = l_\infty\mathrm{form}(\mathfrak{M}\bigcup\mathfrak{H})$). В частности, если $\mathfrak{F}$ — формация из l_∞, то через $L_\infty(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех тотально насыщенных формаций, содержащихся в формации $\mathfrak{F}$. Формации из l_∞ называют l_∞-формациями. Экран, все значения которого l_∞-формации, называют l_∞-значным. Если $\mathfrak{F}$ — l_∞-формация, то через $\mathfrak{F}_\infty$ обозначают её минимальный l_∞-значный локальный экран.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают

$$\mathfrak{X}_\infty(p) = l_\infty \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}),$$

если $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}_\infty(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{X})$. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_n}$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1} = (A/F_{p_1}(A) | A \in \mathfrak{X})$;

2) $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_n} = (A/F_{p_n}(A) | A \in \mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}})$.

Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ называют подходящей для $\mathfrak{X}$, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ число $p_i \in \pi(\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_{i-1}})$.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ — некоторая подходящая для $\mathfrak{F}$ последовательность простых чисел. Тогда тотально локальный экран $\mathfrak{F}_\infty p_1 p_2 \dots p_n$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{F}_\infty p_1 = (\mathfrak{F}_\infty(p_1))_\infty$;

2) $\mathfrak{F}_\infty p_1 \dots p_n = (\mathfrak{F}_\infty p_1 \dots p_{n-1}(p_n))_\infty$.

Тотально насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{H}_\infty$-критической (или, иначе, минимальной тотально насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные тотально насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Следуя А.Н.Скибе [3], будем говорить, что тотально насыщенная формация $\mathfrak{F}$ имеет l_∞-длину n, если существует такая совокупность формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_0 = (1)$, и $\mathfrak{F}_{i-1}$, — максимальная тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, n$. В противном случае будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ имеет бесконечную l_∞-длину.

Корректность этого определения основана на установленной в работе автора [8] модулярности решетки l_∞ всех тотально насыщенных формаций.

Лемма 1 [7]. *Пусть p и q — различные простые числа. Тогда $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)^n = \mathfrak{S}_\pi$, где $\pi = \{p, q\}$.*

Лемма 2 [7]. *Пусть π — некоторое конечное множество простых чисел. Тогда для любого целого неотрицательного n любая тотально насыщенная подформация из $\mathfrak{N}_\pi^n$ однопорождена.*

Лемма 3 [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда формация $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ тотально насыщенна.*

Доказательство. Действительно, как известно (см. пример 1.3.3 [3, с. 28]) произведение $\mathfrak{N}^n(\mathfrak{S}\mathfrak{F})$ является n-кратно насыщенной формацией ($n \geqslant 1$). Но $\mathfrak{N}^n(\mathfrak{S}\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Поэтому формация $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ является n-кратно насыщенной при любом n. Следовательно, $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Лемма доказана.

Лемма 4 [8]. *Пусть G — монолитическая группа, $R = \mathrm{Soc(G)}$ — неабелева группа. Тогда $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$ имеет единственную максимальную l_∞-подформамацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty \mathrm{form}(G/R)$.*

Доказательство. Поскольку формация $\mathfrak{S}_{\pi(R)}$ тотально насыщена, то в силу следствия 7.15 [2, с. 75] имеем $\mathfrak{M} \in l_\infty$. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и пусть M — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда M — монолитична. Обозначим $N = \mathrm{Soc}(M)$. Если теперь N — неабелева группа, либо абелева $\pi'(R)$-группа, то поскольку

$$M \in \mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty \mathrm{form}(G/R),$$

мы получим, что

$$M \in l_\infty \mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Последнее противоречит выбору группы M. Поэтому N — абелева p-группа, где $p \in \pi(R)$. Так как $N \not\subseteq \Phi(M)$, то $N = O_p(M) = F_p(M)$ и $M = [N]K$ для некоторой максимальной в M подгруппы K. Поскольку $p \in \pi(R)$, то $F_p(G) = 1$ и значение на p минимального l_∞-значного локального экрана $\mathfrak{F}_\infty$ формации $\mathfrak{F}$ такое, что

$$\mathfrak{F}_\infty(p) = l_\infty\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_\infty\mathrm{form}G = \mathfrak{F}.$$

По теореме 1.3.12 [3, с. 32] имеем $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\infty(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Но $M \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$. Значит, $M \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная l_∞-подформация формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная собственная l_∞-подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{M}$ и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда A — монолитическая группа. Пусть $P = \mathrm{Soc}(A)$. Поскольку $\mathfrak{M}$ — насыщенная формация, то $P \not\subseteq \Phi(A)$. Допустим, что P — неабелева группа. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{F}$ и в силу леммы 3 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}\mathrm{form}G$, то $A \in \mathrm{form}G$. Согласно лемме 18.2 [2, с. 167] формация $\mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную подформацию $\mathrm{form}(G/R)$. Если $\mathrm{form}A = \mathrm{form}G$, то $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому $\mathrm{form}A \subset \mathrm{form}G$. Значит, $A \in \mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{M}$. Но тогда $A \in \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Значит, P — абелева p-группа. Так как при этом $P \not\subseteq \Phi(A)$, то $P = O_p(A) = F_p(A)$ и $A = [P]H$ для некоторой максимальной подгруппы H из A. Поскольку $\mathfrak{S}_{\pi(R)}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, то $p \notin \pi(R)$. Поэтому $R \subseteq F_p(G)$ и

$$(G/R)/F_p(G/R) = (G/R)/F_p(G)/R \simeq G/F_p(G).$$

Так как $A \in \mathfrak{F}$, то $H \simeq A/F_p(A) \in \mathfrak{F}_\infty(p) = l_\infty\mathrm{form}(G/F_p(G))$. Далее, поскольку $G/R \in \mathfrak{M}$, то $G/F_p(G) \simeq (G/R)/F_p(G/R) \in \mathfrak{M}_\infty(p)$. Но тогда

$$A/O_p(A) \simeq H \in \mathfrak{F}_\infty(p) \subseteq \mathfrak{M}_\infty(p).$$

Значит, согласно лемме 8.2 [2, с. 78] группа A принадлежит формации $\mathfrak{M}$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Лемма 5 [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — l_∞-формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная неразрешимая формация, когда $\mathfrak{F} = l_\infty\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с неабелевым монолитом P, что группа G/P разрешима.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}_\infty$-критическая формация. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$ группу минимального порядка G. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}}$ и $\mathfrak{F} = l_\infty\mathrm{form}G$. Понятно, что R — неабелева группа. Таким образом, группа G удовлетворяет требованиям леммы.

Достаточность. Пусть формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда, ввиду леммы 4, формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную l_∞-подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)}l_\infty\mathrm{form}(G/R)$. Поскольку $G/R \in \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}$. Так как при этом $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}_\infty$-критическая формация. Лемма доказана.

Лемма 6 [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неразрешимая l_∞-формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ найдется по меньшей мере одна $\mathfrak{S}_\infty$-критическая подформация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация из условия леммы. Обозначим через G группу миниального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда G — монолитическая группа с неабелевым монолитом $R = G^{\mathfrak{S}}$. В силу леммы 5 $\mathfrak{L} = l_\infty\mathrm{form}G$ является искомой минимальной тотально насыщенной неразрешимой формацией. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}_\infty$-критическая формация. Тогда длина решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$ бесконечна.*

Доказательство. Ввиду леммы 5 $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, где G — такая монолитическая группа с неабелевым монолитом P, что группа G/P разрешима. Пусть $\pi = \pi(P)$. Согласно лемме 4 имеем $\mathfrak{S}_\pi \subset \mathfrak{F}$. Поскольку формация $\mathfrak{S}_\pi$ тотально нысыщена, то $\mathfrak{S}_\pi$ является элементом решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$. Покажем что длина решетки $L_\infty(\mathfrak{S}_\pi)$, а значит и длина решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$ бесконечна.

Пусть p и q — различные простые числа из π и $\mathfrak{L}_n = (\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)^n$ для любого натурального n. Поскольку $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$ — тотально насыщенные формации, то согласно лемме 6 формация $\mathfrak{L}_n$ тотально насыщена. Ввиду леммы 5.1.7 [3] решетка $L_\infty(\mathfrak{L}_n)$ конечна и поэтому имеет конечную длину. Однако $\mathfrak{L}_i \subset \mathfrak{L}_{i+1}$ для любого натурального i. Следовательно, длина решетки $L_\infty(\mathfrak{L}_{i+1})$ строго больше длины её подрешетки $L_\infty(\mathfrak{L}_i)$. Таким образом, $\mathfrak{S}_\pi$ содержит бесконечную цепь тотально насыщенных подформаций вида $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)^n$, длины которых неограниченно возрастают. Ввиду модулярности решетки тотально насыщенных формаций заключаем, что длина решетки $L_\infty(\mathfrak{S}_\pi)$ не может быть конечной. Так как $L_\infty(\mathfrak{S}_\pi)$ — подрешетка решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$, то длина решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$ бесконечна. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $\mathfrak{F}$ — такая разрешимая l_∞-формация, что $|\pi(\mathfrak{F})| < \infty$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

1) $\mathfrak{F}$ — однопорожденная l_∞-формация;

2) $\mathfrak{F}$ содержит по крайней мере одну подформацию вида $\mathfrak{S}_\pi$, где $|\pi| = 2$.

Доказательство. Пусть $|\pi(\mathfrak{F})| = n$. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ и значит, $\mathfrak{F}$ — однопорожденная l_∞-формация. Если $n = 2$, то в силу теоремы работы [7] формация $\mathfrak{F}$ либо однопорождена, либо совпадает с $\mathfrak{S}_\pi$. Предположим теперь, что утверждение леммы верно для любой разрешимой l_∞-формации $\mathfrak{F}$ с $|\pi(\mathfrak{F})| = n - 1$. Покажем, что тогда лемма справедлива и для всякой разрешимой l_∞-формации $\mathfrak{F}$ с $|\pi(\mathfrak{F})| = n$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая l_∞-формация с $|\pi(\mathfrak{F})| = n$. Допустим, что $\mathfrak{F}$ не является однопорожденной и $\mathfrak{S}_\pi \not\subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, где $|\pi| = 2$. Пусть $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $|\omega| = n - 1$. Тогда если $\mathfrak{M}_\omega = \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{G}_\omega$ не является однопорожденной l_∞-формацией, то по индукции $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{M}_\omega \subset \mathfrak{F}$ для некоторого подмножества π из $\pi(\mathfrak{F})$, где $|\pi| = 2$. Поэтому для любого $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, $|\omega| = n - 1$, l_∞-подформация $\mathfrak{M}_\omega$ однопорождена, т.е. $\mathfrak{M}_\omega = l_\infty \mathrm{form} B_\omega$ для некоторой разрешимой группы B_ω. Тогда $\mathfrak{M}_\omega \subseteq \mathfrak{N}^{t(\omega)}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $t(\omega) = l(B_\omega)$.

Покажем также, что в данных условиях при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $\mathfrak{F}_\infty(p)$ не является однопорожденной. Действительно, если найдется такое $p \in \pi(\mathfrak{F})$, что $\mathfrak{F}_\infty(p)$ является однопорожденной формацией, т.е. $\mathfrak{F}_\infty(p) = l_\infty \mathrm{form} A$ для некоторой разрешимой группы A, то $\mathfrak{F}_\infty(p) \subseteq \mathfrak{N}^k_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $k = l(A)$.

Пусть теперь G — произвольная группа из $\mathfrak{F}$. Тогда если $|\pi(G)| \leqslant n - 1$, то $G \in \mathfrak{M}_\omega \subseteq \mathfrak{N}^{t(\omega)}_{\pi(\mathfrak{F})}$ для некоторого $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Пусть t — наибольшее среди чисел $t(\omega)$. Тогда любая группа $G \in \mathfrak{F}$ с $|\pi(G)| \leqslant n - 1$ содержится в формации $\mathfrak{N}^t_{\pi(\mathfrak{F})}$.

Пусть $|\pi(G)| = n$. Поскольку $p \in \pi(G)$ и $G \in \mathfrak{F}$, то по по теореме 8.3 [2, с. 78] имеем $G/F_p(G) \in \mathfrak{F}_\infty(p)$. Значит, $G \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\infty(p)$.

Так как $\mathfrak{F}$ — разрешимая тотально насыщенная формация, то $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\infty(p)$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\infty(p) \bigcap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\infty(p) = (\mathfrak{G}_{p'} \bigcap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\infty(p) =$$

$$= \mathfrak{M}_\omega\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\infty(p) \subseteq \mathfrak{N}^t_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^k_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{N}^m_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где $m = t + k + 1$. Значит, для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ имеет место $G \in \mathfrak{N}^m_{\pi(\mathfrak{F})}$.

Таким образом,

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^m_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

В силу леммы 1 $\mathfrak{F}$ — однопорожденная тотально насыщенная формация. Получаем противоречие. Таким образом, для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $\mathfrak{F}_\infty(p)$ неоднопорождена и $|\pi(\mathfrak{F}_\infty(p))| = n$.

Применяя теперь аналогичные рассуждения для формации $\mathfrak{F}_\infty(p)$, получим, что $\mathfrak{F}_\infty p(q)$ — неоднопорожденная тотально насыщенная формация и $|\pi(\mathfrak{F}_\infty p(q))| = n$ для любого $q \in \pi(\mathfrak{F})$.

Таким образом, мы можем построить бесконечную подходящую для формации $\mathfrak{F}$ последовательность простых чисел вида $p, q, p, q, \dots$, где $p, q \in \pi(\mathfrak{F})$, $p \neq q$. Но тогда $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)^s \subseteq \mathfrak{F}$ для любого натурального числа s. Значит, $\bigcup_{s\in\mathbb{N}}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)^s \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2 $\bigcup_{s\in\mathbb{N}}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)^s = \mathfrak{S}_\pi$, где $\pi = \{p, q\}$. Поэтому $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ имеет конечную длину;

2) решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ конечна;

3) $\mathfrak{F}$ — разрешимая однопорожденная l_∞-формация.

Доказательство. Пусть имеет место 1). Покажем прежде, что $|\pi(\mathfrak{F})| < \infty$. Действительно, предположим, что $\pi(\mathfrak{F}) = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ — бесконечное множество. В силу леммы 4.2 [1] имеем $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Рассмотрим следующую цепь l_∞-формаций

$$\mathfrak{F}_0 = (1) \subset \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_{p_1} \subset \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{N}_{\{p_1,p_2\}} \subset \dots \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_{\{p_1,\dots,p_n\}} \subset \dots$$

Понятно, что данная цепь является бесконечной цепью l_∞-подформаций формации $\mathfrak{F}$. Поскольку, в силу леммы 21.2 [2, с. 203], $\mathfrak{F}_i$ — максимальная l_∞-подформация в $\mathfrak{F}_{i+1}$, то учитывая модулярность решетки l_∞, получаем противоречие с условием 1). Значит, $|\pi(\mathfrak{F})| < \infty$.

Покажем теперь, что формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$. Тогда по лемме 6 в $\mathfrak{F}$ найдется по меньшей мере одна $\mathfrak{S}_\infty$-критическая подформация $\mathfrak{L}$. В силу леммы 7 длина решетки $L_\infty(\mathfrak{L})$ бесконечна. Но $L_\infty(\mathfrak{L})$ — подрешетка решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$, снова получаем противоречие с условием 1).

Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Ввиду леммы 8 формация $\mathfrak{F}$ либо однопорождена, либо содержит в качестве подформации формацию $\mathfrak{S}_\pi$ для некоторого множества простых чисел π, $|\pi| \geqslant 2$. Поскольку длина решетки $L_\infty(\mathfrak{S}_\pi)$ бесконечна (см. лемму 7), то $\mathfrak{F}$ — однопорожденная l_∞-формация, т.е. $\mathfrak{F} = l_\infty\mathrm{form}G$ для некоторой разрешимой группы G. Следовательно, для формации $\mathfrak{F}$ выполняется условие 3).

Пусть теперь имеет место условие 3). Тогда согласно лемме 5.1.7 [3] решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ конечна. Таким образом, условие 3) влечёт справедливость утверждения 2). Кроме того, очевидно, выполнение условия 2) влечёт за собой условие 1). Теорема доказана.

Abstract. The author obtained a characterization of a soluble one-generated l_∞ -formation of finite groups.

Литература

1. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

2. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.

3. А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Минск, Беларуская навука, 1997.

4. С. Ф. Каморников, *О некоторых свойствах тотально локальных формаций*, Матем. заметки, **60**, № 1 (1996), 24–29.

5. Н. Н. Воробъёв, *Об одном вопросе теории локальных классов конечных групп*, Вопросы алгебры, № 14 (1999), 132–140.

6. W. Guo, K.P.Shum, *On totally local formations of groups*, Comm. Algebra, **30**, № 5 (2002), 2117–2131.

7. В. Г. Сафонов, *Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп*, Алгебра и логика, **42**, № 6 (2003), 727–736.

8. В. Г. Сафонов, *О свойствах решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций*, Препринт, Гомельский госуниверситет, № 3 (2004), 26 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 28.10.04