Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(45), 2007

Математика

УДК 539.3

Методика расчета напряженно-деформированного состояния неоднородной полосы, находящейся под действием внешних сил

Е. М. Березовская

Сложность разрешающих уравнений теории упругости неоднородных анизотропных тел обуславливает применение различных упрощений, вводимых при решении задачи: [1-3] а) уменьшение числа переменных параметров упругости; б) упругие характеристики материала считаются зависящими от одной или двух координат в виде сравнительно простых функций. С помощью интегральных преобразований Фурье и Ханкеля можно свести задачу к краевой для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые при частных видах неоднородности решаются точно. Приближенные методы в настоящее время являются основным способом решения большинства практических задач по расчету элементов конструкций с учетом упругой анизотропной неоднородности.

Настоящая работа посвящена решению граничной задачи для неоднородной ортотропной полосы, свободно лежащей или жестко скрепленной с однородным изотропным или ортотропным основанием. Упругие характеристики полосы представлены в экспоненциальной форме как функции декартовых координат x, y, определяемые равенствами $a_{ij} = H_{ij} e^{kx+ly}$, где k и l – параметры неоднородности материала, H_{ij} (i,j =1,2,6) – упругие постоянные матрицы податливости однородной теории упругости. Координатные оси совпадают с основными направлениями материала и с осями декартовой системы координат. На верхней границе действует нормальная $p(x)$ и касательная $q(x)$ произвольно распределенная нагрузка.

Частные случаи предлагаемой задачи были исследованы в работах [3-7].

Рассмотрим две задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) как в неоднородной ортотропной полосе, так и в упругом основании. В первой задаче – задача А – полоса свободно без трения лежит на основании. Во второй задаче – задача В – полоса жестко скреплена с основанием. В дальнейшем индекс “1” при переменной будет обозначать неоднородную ортотропную полосу, а индекс “2” – упругое основание.

Граничные условия для **задачи А** при действии внешней нагрузки имеют вид:

$$\sigma_{y(1)}\Big|_{y=0} = \begin{cases} p(x), & -a \le x \le a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \qquad \tau_{xy(1)}\Big|_{y=0} = \begin{cases} -q(x), & -a \le x \le a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \tag{1}$$

$$\sigma_{y(1)}\Big|_{y=h} = \sigma_{y(2)}\Big|_{y=h}, \qquad \upsilon_{(1)}\Big|_{y=h} = \upsilon_{(2)}\Big|_{y=h} \tag{2}$$

$$\tau_{xy(1)}\Big|_{y=h} = 0, \qquad \tau_{xy(2)}\Big|_{y=h} = 0. \tag{3}$$

Граничные условия для **задачи В** совпадают с равенствами (1), (2), а равенство (3) необходимо записать в виде

$$u_{(1)}\Big|_{y=h} = u_{(2)}\Big|_{y=h} \qquad \tau_{xy(1)}\Big|_{y=h} = \tau_{xy(2)}\Big|_{y=h}. \tag{4}$$

Методика решения задачи

Решение задачи находится с помощью функций Эри $\Phi_i^{m,n}(x,y)$ (здесь $m=p$ или $m=q$, n принимает значение пробела для полосы, значение “и” для изотропного и значение “о” для ортотропного основания соответственно; $i=1,2$), которые для плоской теории упругости в случае ортотропной экспоненциально неоднородной среды удовлетворяют уравнениям совместности:

– для полосы

$$H_{22}\frac{\partial^4\Phi_1^m}{\partial x^4}+H_{11}\frac{\partial^4\Phi_1^m}{\partial y^4}+(2H_{12}+H_{66})\frac{\partial^4\Phi_1^m}{\partial x^2\partial y^2}+2kH_{22}\frac{\partial^3\Phi_1^m}{\partial x^3}+2lH_{11}\frac{\partial^3\Phi_1^m}{\partial y^3}+(2kH_{12}+kH_{66})\frac{\partial^3\Phi_1^m}{\partial x\partial y^2}+$$

$$+(2lH_{12}+lH_{66})\frac{\partial^3\Phi_1^m}{\partial x^2\partial y}+(k^2H_{22}+l^2H_{12})\frac{\partial^2\Phi_1^m}{\partial x^2}+(l^2H_{11}+k^2H_{12})\frac{\partial^2\Phi_1^m}{\partial y^2}+klH_{66}\frac{\partial^2\Phi_1^m}{\partial x\partial y}=0, \tag{5}$$

– для изотропного основания

$$\frac{\partial^4\Phi_2^{m,u}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi_2^{m,u}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi_2^{m,u}}{\partial y^4}=0, \tag{6}$$

– для ортотропного основания

$$S_{11}\frac{\partial^4\Phi_2^{m,o}}{\partial y^4}+\left(2S_{12}+S_{66}\right)\frac{\partial^4\Phi_2^{m,o}}{\partial x^2\partial y^2}+S_{12}\frac{\partial^4\Phi_2^{m,o}}{\partial x^4}=0\ . \tag{7}$$

Функции Эри $\Phi_i^{m,n}(x,y)$ для уравнений (5) – (7) соответственно имеют вид

$$\Phi_1^m(x,y,k,l)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(A^m\cosh(\xi_2)+B^m\cosh(\xi_4)+N^m\sinh(\xi_2)+K^m\sinh(\xi_4))\,\Omega\frac{d\alpha}{\alpha^2}, \tag{8}$$

$$\Phi_2^{m,u}(x,y,k,l)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(C^{m,u}+D^{m,u}\alpha y)e^{-\alpha y}\,\Omega\frac{d\alpha}{\alpha^2}, \tag{9}$$

$$\Phi_2^{m,o}(x,y,k,l)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(C^{m,o}e^{-\alpha y\gamma_1}+D^{m,o}e^{-\alpha y\gamma_2}\right)\Omega\frac{d\alpha}{\alpha^2}\ . \tag{10}$$

Здесь $\xi_i=\alpha t_i y$ (i = 2,4), t_i (i = 1,2,3,4) – корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5) для полосы, а γ_1,γ_2 – действительные корни характеристического уравнения (7) для основания. Коэффициенты $A^m,B^m,N^m,K^m,C^{m,n},D^{m,n}$ являются неизвестными величинами, зависящими от x, α, k, l. В записи $\Omega\equiv\begin{Bmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{Bmatrix}$ верхняя строчка берется при $m=p$, когда функция $p(x)$ четная и $m=q$, когда функция $q(x)$ нечетная, и нижняя – при $m=p$, когда функция $p(x)$ нечетная и $m=q$, когда функция $q(x)$ четная.

Для определения деформаций $\varepsilon_{x(i)}^{m,n}$, $\varepsilon_{y(i)}^{m,n}$, $\gamma_{xy(i)}^{m,n}$, перемещений $u_i^{m,n}$, $\upsilon_i^{m,n}$ и напряжений $\sigma_{x(i)}^{m,n}$, $\sigma_{y(i)}^{m,n}$, $\tau_{xy(i)}^{m,n}$ (i = 1, 2) используются известные соотношения обобщенного закона Гука для плоской задачи и равенства:

$$\sigma_{x(i)}^{m,n} = \frac{\partial^2 \Phi_i^{m,n}}{\partial y^2}, \quad \sigma_{y(i)}^{m,n} = \frac{\partial^2 \Phi_i^{m,n}}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy(i)}^{m,n} = -\frac{\partial^2 \Phi_i^{m,n}}{\partial x \partial y}. \tag{11}$$

В дальнейшем, для сокращения материала, будем рассматривать только компоненты $\sigma_{y(i)}^{m,n}$.

При действительных корнях t_i (i = 2,4) характеристического уравнения, выражения напряжений для полосы будут следующими:

$$\sigma_{y(1)}^{m} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (A^m \cosh(\xi_2) + B^m \cosh(\xi_4) + N^m \sinh(\xi_2) + K^m \sinh(\xi_4))\,\Omega d\alpha. \tag{12}$$

По зависимостям (9) учитывая (11) компоненты напряжений для изотропного основания определяются следующим образом:

$$\sigma_{y(2)}^{m,u} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (C^{m,u} + D^{m,u}\alpha y)e^{-\alpha y}\,\Omega d\alpha. \tag{13}$$

Учитывая (10) и (11) компоненты $\sigma_{y(i)}^{m,n}$ для ортотропного основания имеют вид:

$$\sigma_{y(2)}^{m,o} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(C^{m,o} e^{-\alpha y \gamma_1} + D^{m,o} e^{-\alpha y \gamma_2}\right)\Omega\, d\alpha. \tag{14}$$

Формулы для остальных компонент НДС слоистой системы получаются аналогично.

Определение коэффициентов для свободно лежащей полосы

Коэффициенты в решениях (8)-(10) для **задачи А** находятся исходя из краевых условий (1), (2), (3). Подставив значения $\sigma_{y(1)}^{m}$, $\sigma_{y(2)}^{m,n}$, $\tau_{xy(1)}^{m}$, $\tau_{xy(2)}^{m,n}$ и $\upsilon_i^{m,n}, i = 1,2$, получим систему уравнений относительно $A^m, B^m, N^m, K^m, C^{m,n}, D^{m,n}$:

$$M \times (A^m,\, B^m,\, N^m,\, K^m,\, C^{m,n},\, D^{m,n})^T = (\tilde{p},\, \tilde{q},\, 0,\, 0,\, 0,\, 0)^T, \tag{15}$$

где $\tilde{p}(\alpha)$ и $\tilde{q}(\alpha)$ соответствующие трансформанты косинус – или синус – преобразования Фурье функции давлений $p(x)$ и $q(x)$, M – матрица системы уравнений соответствующей задачи. Обозначим через $P_i = H_{12}t_i^2 - H_{22}$, $\rho_i = l\cosh(\xi_i) - \alpha t_i \sinh(\xi_i)$, $Q_i = P_i/(l^2 - \alpha^2 t_i^2)$, $r_i = l\sinh(\xi_i) - \alpha t_i \cosh(\xi_i)$, $c_i = \mathrm{ch}(\alpha t_i h)$, $s_i = \mathrm{sh}(\alpha t_i h)$ ($i = 2,4$), $e_0 = \exp(kx + lh)$, $\upsilon_1 = e_0 \alpha Q_2 \rho_2$, $\upsilon_2 = e_0 \alpha Q_4 \rho_4$, $\upsilon_3 = e_0 \alpha Q_2 r_2$, $\upsilon_4 = e_0 \alpha Q_4 r_4$. Учитывая, что для плоской деформации $\delta = (1+\nu)/E$, $\rho = 2(1-\nu^2)/E$ и $\delta = (1+\nu)/E$, $\rho = 2/E$ – для плоского напряженного состояния (E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона), получим значения

$$\Delta = (t_2 s_2 - t_4 s_4)(\rho(t_2 s_4 - t_4 s_2) + t_4 \upsilon_3 - t_2 \upsilon_4) + t_2 t_4 (c_2 - c_4)(\rho(c_2 - c_4) + \upsilon_2 - \upsilon_1),$$

$$\Delta_A = \tilde{p} t_4 (t_2 (s_4 \upsilon_4 - c_4 \upsilon_2 + \rho) + t_2 c_2 (\upsilon_2 - \rho c_4) - t_4 s_4 (\upsilon_3 - \rho s_2)) + \\ + \tilde{q}(t_2 c_2 (\upsilon_4 - \rho s_4) - t_4 c_4 (\upsilon_3 - \rho s_2)),$$

$$\Delta_N = -\tilde{p} t_4 (t_2 s_2 (\upsilon_2 - \rho c_4) - t_4 s_4 (\upsilon_1 - \rho c_2)) + \\ + \tilde{q}(t_4 c_4 (\upsilon_1 - \upsilon_2 - \rho c_2) - t_2 s_2 (\upsilon_4 - \rho s_4) + t_4 (s_4 \upsilon_4 + \rho)),$$

$$\Delta_D = -\tilde{p}(\upsilon_1 t_4(t_2 c_2 c_4 - t_2 - t_4 s_4 s_2) + t_2\upsilon_2(t_4 c_2 c_4 - t_4 - t_2 s_4 s_2) + (t_2\upsilon_4 - t_4\upsilon_3)(t_2 s_2 c_4 - t_4 s_4 c_2) +$$
$$+\tilde{q}((t_4 s_4 - t_2 s_2)(s_2\upsilon_4 - s_4\upsilon_3) - (c_4 - c_2)(t_2 c_2\upsilon_4 - t_4 c_4\upsilon_3) + (\upsilon_2 - \upsilon_1)(t_2 c_2 s_4 - t_4 c_4 s_2)).$$

Решение системы (15) запишется для неоднородной полосы:

$$A^m = \frac{\Delta_A}{\Delta},\ B^m = \tilde{p} - A^m,\ N^m = \frac{\Delta_N}{\Delta},\ K^m = \frac{\tilde{q} - t_2 N^m}{t_4}, \tag{16}$$

– для *изотропного* основания:

$$D^{m,n} = \frac{\Delta_D}{\Delta} e^{\alpha h},\ C^{m,n} = (1-\alpha h)D^{m,n},$$

– для *ортотропного* основания:

$$D^{m,n} = \frac{\Delta_D}{\Delta} e^{\alpha h\gamma_2}, \quad C^{m,n} = -\gamma_2/\gamma_1 D^{m,n} e^{\alpha h(\gamma_1 - \gamma_2)}.$$

Значения Δ, Δ_A, Δ_N, Δ_D для ортотропного случая изменяются и в обозначениях

$$a_1 = c_2 - c_4,\ a_2 = t_2 t_4,\ a_3 = \delta(2S_{11} + \rho - \delta),\ a_4 = t_2 R_4 s_4 - t_4 R_2 s_2,\ \ b_6 = S_{12} - S_{11}\gamma_2^2,$$
$$a_5 = 2S_{11} - \delta,\ a_6 = \upsilon_4 t_2 - \upsilon_3 t_4,\ a_7 = t_4 s_4 c_2 - t_2 s_2 c_4,\ a_8 = t_2 s_2 \upsilon_2 - t_4 s_4 \upsilon_1,\ a_9 = t_2 s_4 - t_4 s_2,$$
$$b_1 = e_0 R_2 c_2,\ \ b_2 = e_0 R_4 c_4, b_3 = e_0 R_2 s_2,\ b_4 = e_0 R_4 s_4,\ \bar{a}_7 = t_2 c_2 s_4 - t_4 c_4 s_2,\ b_8 = t_4 s_4 - t_2 s_2,$$
$$\gamma_{21} = \gamma_2 - \gamma_1,\ f_\gamma = \frac{S_{22}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{\gamma_1\gamma_2},\ \ \upsilon_5 = \frac{S_{12}\gamma_1^2 - S_{22}}{\gamma_1},\ \upsilon_6 = \frac{S_{12}\gamma_2^2 - S_{22}}{\gamma_2},\ b_5 = S_{12} - S_{11}\gamma_1^2,$$
$$b_7 = t_2 c_2 \upsilon_4 - t_4 c_4 \upsilon_3,\ d_1 = b_5\upsilon_6 - b_6\upsilon_5,\ \ d_2 = \gamma_1\upsilon_6 - \gamma_2\upsilon_5, \quad d_3 = \gamma_1 b_6 - \gamma_2 b_5,\ \ d_4 = \upsilon_5 - \upsilon_6,$$
$$b_9 = s_2\upsilon_4 - s_4\upsilon_3,\ d_5 = b_5 - b_6,\ \ d_6 = -c_4\upsilon_5 - \upsilon_2, \quad d_7 = c_2\upsilon_5 + \upsilon_1, \quad d_8 = c_4\upsilon_1 - c_2\upsilon_2,$$

записываются следующим образом:

$$\Delta = (t_2 s_2 - t_4 s_4)(f_\gamma a_9 + \gamma_{21} a_6) + a_1 a_2 (f_\gamma a_1 + \gamma_{21}(\upsilon_1 - \upsilon_2)),$$
$$\Delta_A = \tilde{p} t_4(-t_2 s_4(s_4 f_\gamma + \upsilon_4\gamma_{21}) - a_1 t_2 (c_4 f_\gamma + \upsilon_2\gamma_{21}) + t_4 s_4 (s_2 f_\gamma + \upsilon_3\gamma_{21})) - \tilde{q}(-d_2 a_7 - \gamma_{21} b_7),$$
$$\Delta_N = -\tilde{p} t_4(t_4 s_4(\upsilon_1\gamma_{21} + c_2 f_\gamma) - t_2 s_2(\upsilon_2\gamma_{21} + c_4 f_\gamma)) +$$
$$+\tilde{q}(b_8(s_4 d_2 - \upsilon_4\gamma_{21}) + t_4 c_4(a_1 d_2 + (\upsilon_2 - \upsilon_1)\gamma_{21})),$$
$$\Delta_D = -\tilde{p}\gamma_1(\upsilon_1 t_4(t_2 c_2 c_4 - t_2 - t_4 s_2 s_4) + \upsilon_2 t_2(t_4 c_2 c_4 - t_2 s_2 s_4 - t_4) - a_7 a_6) +$$
$$+\tilde{q}\gamma_1(b_8 b_9 + a_1 b_7 + (\upsilon_2 - \upsilon_1)a_7).$$

Определение коэффициентов для закрепленной полосы

Учитывая краевые условия (1), (2), (4), система уравнений для определения коэффициентов в решениях (8)–(10) **задачи** В имеет вид (15), но с более сложными выражениями для элементов матрицы. Решение системы для полосы имеет вид (16), для изотропного основания

$$D^{m,n} = \frac{\Delta_D}{\Delta} e^{\alpha h},\ \ C^{m,n} = (A^m(c_2 - c_4) + N^m(s_2 - \frac{t_2}{t_4}s_4) + \tilde{p}c_4 + \frac{s_4}{t_4}\tilde{q})e^{\alpha h} - \alpha h D^{m,n}$$

и для ортотропного основания определяется формулами

$$D^{m,n} = \frac{\Delta_D}{\Delta} e^{\alpha h \gamma_2}, \quad C^{m,n} = (A^m (c_2 - c_4) + N^m (s_2 - \frac{t_2}{t_4} s_4) + \tilde{p} c_4 + \frac{s_4}{t_4} \tilde{q}) e^{\alpha h \gamma_1} - D^{m,n} e^{\alpha h (\gamma_1 - \gamma_2)}.$$

В этих решениях величины Δ, Δ_A, Δ_N, Δ_D являются достаточно сложными выражениями.

Учитывая принцип суперпозиции, подставляя найденные значения коэффициентов $A^m, B^m, N^m, K^m, C^{m,n}, D^{m,n}$ в равенства (12)–(14) получаем формулы для нахождения значений величин напряжений решаемых задач. Заметим, что для $\tilde{p}(\alpha)$ и $\tilde{q}(\alpha)$ следует брать соответствующие косинус – или синус – преобразования Фурье функций давлений $p(x)$ и $q(x)$.

Подобным образом вычисляются все остальные компоненты, характеризующие НДС экспоненциально неоднородной полосы и упругого основания. Варьируя параметрами k и l, можно моделировать исследование материалов с заданными свойствами неоднородности.

Abstract. The paper considers the particularities of influence of materials on stress-strain state of a loading system under the influence of various surface-loading modes.

Литература

1. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий; Москва, Гостехиздат, 1977.

2. Колчин, Г. Б. Плоские задачи теории упругости неоднородных тел / Г. Б. Колчин; Кишинев, Штиинца, 1971.

3. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский; Минск, Наука и техника, 1988.

4. Березовская, Е. М. Решение краевой задачи для неоднородной ортотропной полосы с распределенной нагрузкой / Е. М. Березовская // Материалы, технологии, инструменты, 2000. – Т. 5. – № 3 – С. 5–9.

5. Можаровский, В. В. Решение краевой задачи для неоднородной полосы под действием нормальных и касательных сил / В. В. Можаровский, Е. М. Березовская // Математические проблемы механики неоднородных структур. Львов, 2000. – С. 291–293.

6. Березовская, Е.М. Взаимодействие жесткого штампа с упругим неоднородным покрытием / Е. М. Березовская, В. В. Можаровский // Международный симпозиум "О природе трения твердых тел", 28–30 августа 2002, ИММС им. В. А. Белого НАНБ, Гомель, 2002. – С. 59–60.

7. Можаровский, В.В. Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В. В. Можаровский, Ю. М. Плескачевский, С. Ю. Бабич и др. // Трение и износ, 2001. – Т. 22. – № 4. – С. 379–385.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 27.03.07