Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №6(45), 2007

УДК 517.977

Построение оптимальной размыкаемой обратной связи для стабилизации динамических систем

Е. А. Ружицкая

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему, поведение которой при $t \geq 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu + dw \tag{1}$$

$$(x, b, d \in R^n,\ u, w \in R,\ A \in R^{n \times n},\ rank(b, Ab, ..., A^{n-1}b) = n),$$

где $x = x(t)$ — n-вектор состояния системы в момент t, $u = u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия, $w = w(t)$ — значение возмущения.

Относительно действующих на систему (1) возмущений будем предполагать, что в каждом процессе стабилизации могут реализоваться любые кусочно–непрерывные функции $w(t) \in W = \{w \in R : p_* \leq w(t) \leq p^*\},\ t \geq 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — малое положительное число, $h > 0,\ L > 0$ — фиксированные конечные заданные числа, G — ограниченная окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (1) $(u = 0,\ w = 0)$.

Функцию $u(t, x),\ x \in G,\ t \in [0, h[$, назовем ограниченной дискретной размыкаемой стабилизирующей обратной связью системы (1) в области G, если

1) $u(t, 0) = 0,\ t \in [0, h[$;

2) $|u(t, x)| \leq L,\ x \in G,\ t \in [0, h[$;

3) траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x) + dw(t),\ x(0) = x_0,\ x_0 \in G, \tag{2}$$

при фиксированном (реализующемся) возмущении $w(t) \in W,\ t \geq 0$, является непрерывным решением системы уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu(t) + dw(t),\ x(0) = x_0,$$

где $u(t) = u(t, x(kh)),\ t \in [kh, (k+1)h[,\ k = 0, 1, \ldots$;

4) замкнутая система (2) без возмущений $(w(t) \equiv 0,\ t \geq 0)$ асимптотически устойчива в G;

5) существует такое конечное число $t(\varepsilon)$, что каждое решение $x(t),\ t \geq 0$, замкнутой системы (2) обладает свойством $||x(t)|| \leq \varepsilon$ при $t \geq t(\varepsilon)$.

В определении ограниченной дискретной размыкаемой стабилизирующей обратной связи явно участвуют возмущения, в отличие от классических обратных связей, которые строятся по детерминированным моделям стабилизируемых систем. Такие типы обратных связей стали впервые систематически изучаться в теории стохастического оптимального управления [1, 2], где для описания неопределенности (возмущения) использовались вероятностные модели. Нестохастические модели неопределенности типа введенных выше появились позже, с развитием теории дифференциальных игр [3]. Учет неопределенности при введении обратной связи существенно расширяет виды обратных связей [2]. В данной работе будут использованы лишь простейшие виды ограниченных стабилизирующих обратных связей, называемые [4, 5] размыкаемыми обратными связями.

Как и в случае ограниченной стабилизирующей обратной связи классического типа [6], явное построение определенной выше обратной связи сопряжено с огромными трудностями. Ниже, следуя [5], для решения проблемы стабилизации принят "обходной" путь — обратная связь явно (формульно, в замкнутом виде) не строится, но указывается алгоритм работы стабилизатора, который в каждом конкретном процессе управления способен строить (вычислять) в режиме реального времени соответствующие значения обратной связи.

Поскольку прямые (геометрические) ограничения на управляющие воздействия систематически и полно учитываются только в теории оптимального управления, то для построения ограниченной размыкаемой обратной связи будем использовать методы оптимального управления. Поэтому, по аналогии с [7, 8], вводится специальная вспомогательная (сопровождающая) задача оптимального управления.

2. Сопровождающая задача оптимального управления. Выберем натуральное число N $(N > n)$, действительное малое число $\varepsilon > 0$ и положим $\Theta = Nh$.

Доступным управляющим воздействием будем называть кусочно–постоянную функцию $u(t),\ t \in T = [0, \Theta]:\ \ u(t) = u_j,\ t \in [(j-1)h, jh[,\ j = \overline{1, N}$, удовлетворяющую ограничению

$$|u(t)| \leq L,\ t \in T. \tag{3}$$

Доступное управляющее воздействие $u(t),\ t \in T$, назовем программой для состояния $z \in R^n$, если траектория $x(t),\ t \in T$, системы

$$\dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = z,$$

удовлетворяет условию $Hx(\Theta) = g,\ g \in R^m,\ H \in R^{m \times n}$.

Программу $u(t),\ t \in T$, назовем гарантирующей, если для любого $w(t) \in W,\ t \in T$, траектория $x(t),\ t \in T$, системы

$$\dot{x} = Ax + bu + dw(t),\ x(0) = z, \tag{4}$$

в момент времени Θ попадает на терминальное множество $X_\varepsilon = \{x \in R^n : g_i - \varepsilon \leq h_i' x(\Theta) \leq g_i + \varepsilon,\ i = \overline{1, m}\}$, h_i' — i-я строка матрицы H.

Используя формулу Коши, исключим из системы (4) переменные состония

$$x(t) = F(t)z + \int_0^t F(t)F^{-1}(s)bu(s)ds + \int_0^t F(t)F^{-1}(s)dw(s)ds,$$

$$(\dot{F} = AF,\ F(0) = E).$$

Тогда условия $h_i' x(\Theta) \in X_\varepsilon,\ i = \overline{1, m}$, примут вид:

$$g_i - \gamma_i - \varepsilon \leq h_i' F(t)z + \int_0^\Theta h_i' F(t)F^{-1}(s)bu(s)ds \leq g_i - \gamma_i + \varepsilon, \tag{5}$$

где

$$\gamma_i = \min_{w(t) \in W,\ t \in T} \int_0^\Theta h_i' F(t)F^{-1}(s)dw(s)ds.$$

Таким образом, соотношения (5) и условия ограниченности управляющего воздействия (3) описывают допустимые дискретные гарантирующие управляющие воздействия $u(t),\ t \in T$.

Качество гарантирующей программы будем оценивать по значению функционала

$$\min \int_0^{\Theta} |u(t)|dt. \tag{6}$$

Гарантирующую программу $u^0(t) = u^0(t|z),\ t \in T$, назовем оптимальной программой для состояния $z \in R^n$, если на нем критерий качества (6) достигает минимального значения среди всех гарантирующих программ.

Таким образом, оптимальная программа является решением задачи:

$$\int_0^{\Theta} |u(t)|dt \to \min,$$

$$g_i - \gamma_i - \varepsilon \le h_i' F(t)z + \int_0^{\Theta} h_i' F(t)F^{-1}(s)bu(s)ds \le g_i - \gamma_i + \varepsilon,\ i = \overline{1,m}, \tag{7}$$

$$|u(t)| \le L,\ t \in T.$$

Оптимальную стартовую дискретную размыкаемую стабилизирующую обратную связь определим равенством

$$u^0(t,z) = u^0(t|z),\ t \in [0,h[,\ z \in R^n.$$

Пусть G_Θ — множество тех начальных состояний $z \in R^n$, для которых задача (7) имеет решение.

Проанализируем поведение замкнутой системы (2) в некотором конкретном процессе управления. Пусть в рассматриваемом процессе реализуется некоторое начальное состояние $x_0^* \in G_\Theta$, и возмущение $w^*(t) \in W,\ t \in T$. Они породят в системе (2) переходной процесс $x^*(t),\ t \in T$, вдоль которого выполняется тождество

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + bu^0(t, x^*(t)) + dw^*(t),\ t \in T, x(0) = x_0^*. \tag{8}$$

Отсюда видно, что в каждом конкретном процессе управления нужны лишь значения дискретной размыкаемой стабилизирующей обратной связи

$$u^*(t) = u^0(t, x^*(t)), t \in T \tag{9}$$

вдоль изолированной непрерывной кривой $x^*(t),\ t \in T$. При этом в каждый текущий момент времени τ, зная текущее состояние $x^*(\tau)$, достаточно уметь вычислять текущее значение $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$ за время, не превосходящее h, т.е. в режиме рального времени.

Функция (9) называется реализацией оптимальной размыкаемой обратной связи в конкретном процессе управления. Устройство, способное вычислять в каждом конкретном процессе управления (8) значения функции (9), называется оптимальным стабилизатором.

3. Алгоритм работы оптимального стабилизатора. До начала функционирования системы в момент $\tau = 0$ стабилизатор строит оптимальную программу $u^0(t),\ t \in T$, задачи (7) для состояния $z = x_0^*$. Это можно сделать, например, адаптивным методом линейного программирования [9], т. к. все элементы задачи известны. На этом этапе нет ограничения на время построения оптимального программного управления.

В каждый текущий момент τ процесса управления стабилизатор строит программное решение задачи (7) для позиции $(\tau, x^*(\tau))$, используя в качестве начального приближения для сопровождающих элементов [9] оптимального управления $u^0(t|\tau, x^*(\tau))$, $t \in T$, оптимальные элементы, построенные в предыдущий момент $\tau - h$.

4. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия при действии на него возмущений.

Пусть поведение такой системы описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 + u + w,\ (x_1,\ x_2,\ u,\ w \in R), \tag{10}$$

где x_1 — отклонения маятника от положения равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; x_2 — скорость; u — управляющее воздействие; w — действующее на систему возмущение.

Пусть в начальный момент $t = 0$ рассматриваемая система находилась в состоянии $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 2$. Требуется стабилизировать ее в окрестности состояния равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. В процессе стабилизации на систему действуют любые ограниченные возмущения $w(t) \in W$, $t \geq 0$.

При построении дискретной размыкаемой стабилизирующей обратной связи были выбраны следующие параметры сопровождающей задачи оптимального управления (7): $\Theta = 1$, $h = 0.05$, $L = 2$.

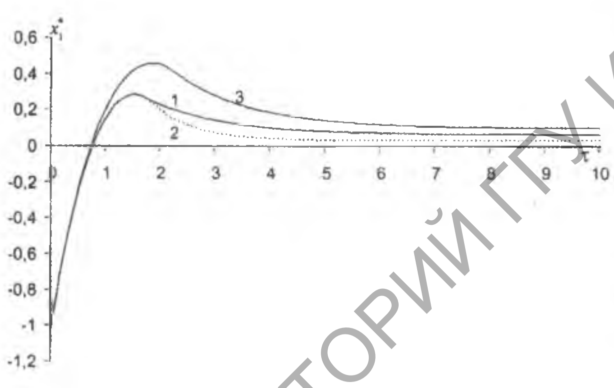

Рис 1. Траектории замкнутой системы

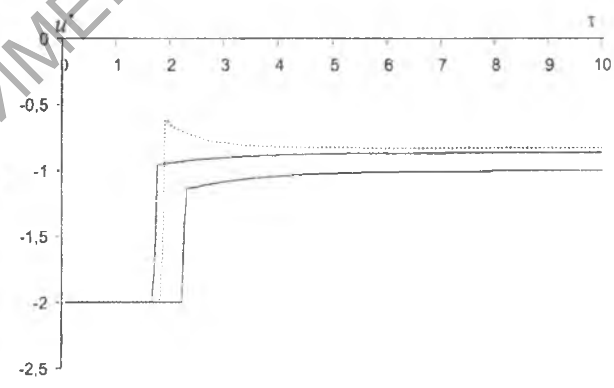

Рис. 2. Реализовавшиеся управления

Приведем результаты вычислений. На рис 1. представлены траектории замкнутой системы при различных реализовавшихся возмущениях. Кривая 1 соответствует траектории системы (10), замкнутой дискретной размыкаемой стабилизирующей обратной связью при действии постоянного возмущения $w(t) = 0.8, t \geq 0$. В качестве ε — окрестности была взята следующая окрестность состояния равновесия: $|x_1(t)| \leq 0.95$, $|x_2(t)| \leq 0.95$. Кривая 2 — штриховая соответствует реализовавшейся траектории системы (10), замкнутой классической обратной связью при действии постоянного возмущения $w(t) = 0.8, t \geq 0$, т.е. при построении стабилизирующей обратной связи в системе не учитывались возмущения.

Кривая 3 соответствует реализовавшейся траектории системы (10), замкнутой размыкаемой обратной связью при действии постоянного возмущения $w(t) = 0.9, t \geq 0$. В качестве ε — окрестности была взята следующая окрестность состояния равновесия: $|x_1(t)| \leq 1.1$, $|x_2(t)| \leq 1.1$. Классическая обратная связь в этом случае не стабилизирует систему.

На рис.2 представлены соответсвующие реализовавшиеся значения обратных связей.

Преимущество размыкаемой обратной связи по сравнению с классической состоит в том, что во-первых, оптимальная размыкаемая обратная связь гарантирует стабилизацию замкнутой системы при различных ограниченных возмущениях в заданной ε-окрестности, во-вторых, стабилизирует систему тогда, когда классическая обратная связь уже не срабатывает.

Abstract. The paper considers the problem of dynamic systems stabilization under conditions of uncertainty when the system is influenced by the unknown limited perturbations. The concept of discrete disconnected stabilizing feedback is introduced. For its construction the accompanying problem of optimum control — the problem of full impulse minimization of operating influence is used. The results are illustrated by the example of unstable dynamic system stabilization of the second order.

Литература

1. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.

2. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т.Леондеса. — М.:Мир, 1980. — 407с.

3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1976. — 456 с.

4. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. 1 Однократное замыкание // Автомат. и телемех. — 1996, №7. — С. 121–130.

5. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // ЖВМ и МФ. – 2004. Т. 44., №2. — С. 265–286.

6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. К методам стабилизации динамических систем // Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 1994, №3. — С. 67–77.

7. R. Gabasov, F. M. Kirillova, Real-time construction of optimal closable feedbacks, 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, V.D., San Francisca, CA, USA. 1996.

8. Gabasov R., Kirillova F.M., Prischepova S.V. Optimal Feedback Control Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. — Verlag London Limited, 1995. — Vol. 207. — 202 p.

9. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Часть 1. Линейные задачи. — Мн: Изд–во "Университетское", 1984. — 213 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 13.06.07