Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **2**, 2006

УДК 553:548

Поляризационные и энергетические свойства векторных бессель-гауссовых световых пучков

С. С. Гиргель

Введение

В настоящее время активно проводятся исследования бесселевых и бессель-гауссовых волновых электромагнитных полей [1-10], которые, в определенном смысле, являются бездифракционными и обладают интересными свойствами. Однако в большинстве работ исследователи ограничиваются скалярным приближением. Такой подход является заведомо приближенным и не позволяет описывать, например, поперечный поток энергии в пучке. Цель данной работы - предложить общий метод для описания узконаправленных векторных пучков Бесселя-Гаусса и исследовать поляризационные и энергетические характеристики таких пучков.

Известно, что скалярный пучок Бесселя-Гаусса в изотропной среде является решением параболического уравнения и равен [5 - 7]

$$f(\boldsymbol{r},t) = G\,Q\,J_m\,e^{im\varphi}e^{i(k\,z-\omega t)} = f\,e^{i(k\,z-\omega t)}. \tag{1}$$

Нулевая гауссова мода (гауссиан) *G*, аргумент u_1 функции Бесселя $J_m(u_1)$ первого рода и согласующий коэффициент *Q(z)* в цилиндрической системе координат соответственно равны

$$G(\rho,z) = \frac{1}{l}\cdot exp\left(\frac{-k\rho^2}{2l}\right), \quad u_1 = k'_\perp\rho\,, \;\; Q(z)=exp(\frac{ik_\perp^2 L^2}{2kl}). \tag{2}$$

Здесь и далее применяются обозначения:

$$l = L + i\,z\,,\; L=k\,w_0^2/2,\; k'_\perp = k_\perp L/l\,,\; \varepsilon\,\mu\,\omega^2/c^2 = k^2\,,\; k_0 = \omega/c\,, \tag{3}$$

где $k_\perp$ – поперечная (по отношению к оси распространения пучка *z*) компонента волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Для параксиальных пучков, которые мы рассматриваем, $k_\perp << k$.

Чтобы найти общие выражения для векторных пучков Бесселя-Гаусса, применим модифицированный формализм векторных потенциалов Герца [11, 6]. Пусть некоторый магнитный вектор Герца ***f(r)*** удовлетворяет векторному параболическому уравнению

$$\left(\nabla_\perp^2 + 2ik\nabla_z\right)\boldsymbol{f} = 0\,, \tag{4}$$

тогда вектор

$$\boldsymbol{E} = [\nabla, \boldsymbol{f}\,] \tag{5}$$

будет вектором электрического поля соответствующего векторного светового пучка ***E***-типа. Полное же выражение для векторного пучка - $\boldsymbol{E}(r,t) = \boldsymbol{E}\,e^{i(kz-\omega t)}$. Теперь вектор поля $\boldsymbol{H}$ непосредственно выражается из уравнений Максвелла .

Зная векторные поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, затем для параксиальных пучков Бесселя-Гаусса можно рассчитать усредненные по времени плотность энергии *w* и плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) $\boldsymbol{S}$:

$$w = \frac{\varepsilon|\boldsymbol{E}_\perp|^2}{8\pi} = \frac{\mu|\boldsymbol{H}_\perp|^2}{8\pi} \qquad S_z = \frac{c}{n}w. \tag{6}$$

Существует также поперечный поток энергии $\boldsymbol{S}_\perp$, который не учитывается скалярной теорией. Можно показать, что

$$\boldsymbol{S}_\perp = -\frac{c}{8\pi n}Re\left(\varepsilon\boldsymbol{E}_\perp^*\cdot E_z + \mu\boldsymbol{H}_\perp^*\cdot H_z\right), \tag{7}$$

где символ *Re* означает вещественную часть_выражения, $*$ – комплексное сопряжение.

Чтобы находить и исследовать разные моды, будем выбирать различные компоненты магнитного вектора $\boldsymbol{f}$, удовлетворяющие векторному параболическому уравнению (4).

I. Бессель-гауссовы пучки. PPE_x-моды

Положим в (4) $f_x = f_z = 0$, $f_y =(GQJ_m e^{im\varphi})/(ik)$, тогда в параксиальном приближении из (5) находим поляризационные характеристики E_y-мод :

$$\boldsymbol{E} = \left\{ \boldsymbol{e}_x J_m + i\left[\frac{-x}{l} J_m + \frac{k'_\perp}{2k}\left(J_{m-1} e^{-i\varphi} - J_{m+1} e^{-i\varphi} \right) \right] \boldsymbol{e}_z \right\} G\,Q\,e^{im\varphi} \; ; \tag{8}$$

$$\mu\,\boldsymbol{H} = n\left\{ \boldsymbol{e}_y J_m - \left[\frac{iy}{l} J_m + \frac{k'_\perp}{2k}\left(J_{m-1} e^{-i\varphi} + J_{m+1} e^{-i\varphi} \right) \right] \boldsymbol{e}_z \right\} GQ\,e^{im\varphi} . \tag{9}$$

Так как E_y=0, то эти моды назовем PPE_x-модами (плоско-поляризованными E_x-модами).

Теперь можно вычислить плотность энергии w и плотность потока энергии $\boldsymbol{S}$ (вектор Пойнтинга) для бессель-гауссовых PPE_x-мод в цилиндрическом базисе:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left| GQJ_m \right|^2 , \; S_z = \frac{c}{n} w , \tag{10}$$

$$\boldsymbol{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} Re \left\{ \frac{\left| J_m \right|^2}{l} \rho \boldsymbol{e}_\rho + \frac{ik'_\perp}{2k} J_m^* \left\langle - J_{m-1}\left(\boldsymbol{e}_\rho + i\boldsymbol{e}_\varphi \right) + J_{m+1}\left(\boldsymbol{e}_\rho + i\boldsymbol{e}_\varphi \right) \right\rangle \right\} \left| GQ \right|^2 . \tag{11}$$

Обычный гелий-неоновый лазер генерирует линейно поляризованный гауссов пучок. Если такое излучение пропустить через аксикон (коническую линзу), то на выходе линзы получим бессель-гауссову *PPE-моду*. Расходимость такого пучка определяется как расходимостью гауссового пучка, так и коническим углом аксикона [3, 5, 7].

Заметим также, что для бессель-гауссовых пучков аргументы функций Бесселя будут комплексными, что значительно усложняет расчеты. Лишь при z=0 (в перетяжке) функции Бесселя становятся вещественными.

II. Бессель-гауссовы пучки. Циркулярные моды

Из выражений (8)-(9) можно также найти поляризационные характеристики циркулярных бессель-гауссовых мод [7]. Векторы электрического и магнитного полей право- и лево-циркулярно поляризованных узконаправленных пучков Бесселя-Гаусса пропорциональны друг другу:

$$\boldsymbol{E}_\pm = \left[J_m(\boldsymbol{e}_\rho \pm i\boldsymbol{e}_\varphi) - i\left(\frac{\rho}{l} J_m \pm \frac{k'_\perp}{k} J_{m\pm 1} \right) \boldsymbol{e}_z \right] G\,Q\,e^{i(m\pm 1)\varphi} ; \quad \boldsymbol{H}_\pm = \mp i\frac{\varepsilon}{n} \boldsymbol{E}_\pm . \tag{12}$$

Плотность энергии w и плотность потока энергии $\boldsymbol{S}$ для циркулярных мод соответственно равны

$$w = \frac{\varepsilon \left| QG\,J_m \right|^2}{4\pi} ; \quad S_z = \frac{c}{n} w ; \tag{13}$$

$$\boldsymbol{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{4\pi\, n} Re \left\{ i\left(\boldsymbol{e}_\rho \mp i\boldsymbol{e}_\varphi \right) \left(\frac{\rho}{l} \left| J_m \right|^2 \pm \frac{k'_\perp}{n} J_m^* \cdot J_{m\pm 1} \right) \right\} \left| GQ \right|^2 . \tag{14}$$

Из (12) можно найти различные частные случаи. Так, радиально поляризованные бессель-гауссовы пучки описываются выражениями

$$\boldsymbol{E} = \left[J_m \boldsymbol{e}_\rho + i\left(\frac{-\rho}{l} J_m + \frac{k'_\perp}{k} J_0 \right) \boldsymbol{e}_z \right] G\,Q ; . \quad \boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{n} \boldsymbol{e}_\varphi J_1 G\,Q . \tag{15}$$

Эти соотношения аналогичны выражениям для бесселевых радиально поляризованных мод [2, 8]. Основное отличие состоит в том, что появляются дополнительные множители GQ, и амплитуда пучка быстро убывает в радиальном направлении по гауссовому закону.

Азимутально поляризованные бессель-гауссовы моды имеют вид:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_\varphi J_1 G Q; \quad \boldsymbol{H} = -\frac{\varepsilon}{n}\left[J_1 \boldsymbol{e}_\rho + i\left(\frac{-\rho}{l} J_1 + \frac{k'_\perp}{k} J_0 \right)\boldsymbol{e}_z \right] G Q. \tag{16}$$

Азимутально поляризованные бессель-гауссовы $\boldsymbol{E}$-моды впервые экспериментально были получены , а затем вектор электрического поля $\boldsymbol{E}$ был описан Холлом и др. [4, 5].

III. Бессель-гауссовы *TE*-моды

С помощью формализма векторов Герца на основе выражения скалярного Бессель-гауссова пучка можно также найти явные выражения для векторных бессель-гауссовых *TE*-мод, у которых электрическое поле строго поперечно, т.е. $E_z=0$ [7].

В цилиндрической системе координат векторные амплитуды электрического и магнитного поля *TE*-мод параксиальных пучков Бесселя-Гаусса равны:

$$\boldsymbol{E} = \left[\frac{-\rho J_m \boldsymbol{e}_\varphi}{l} - \frac{ik'_\perp}{2k}\left((\boldsymbol{e}_\rho + i\boldsymbol{e}_\varphi) J_{m-1} + (\boldsymbol{e}_\rho - i\boldsymbol{e}_\varphi) J_{m+1} \right) \right] G Q e^{im\varphi}; \tag{17}$$

$$\boldsymbol{H}_\perp = \frac{\varepsilon}{n}\left[\frac{\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho J_m}{l} - \frac{k'_\perp}{2k}\left((\boldsymbol{e}_\rho + i\boldsymbol{e}_\varphi) J_{m-1} - (\boldsymbol{e}_\rho - i\boldsymbol{e}_\varphi) J_{m+1} \right) \right] G Q e^{im\varphi}; \tag{18}$$

$$H_Z = \frac{i\varepsilon}{nlk}\left[\left(2 - \frac{k\rho^2}{l} + \frac{lk'^2_\perp}{k} \right) J_m + k'_\perp \rho \left(J_{m-1} + J_{m+1} \right) \right] G Q e^{im\varphi}. \tag{19}$$

Как видно, поляризационные характеристики векторных бессель-гауссовых *TE*-мод достаточно сложны и пока не исследовались.

Сделаем ряд заключительных замечаний.

1. В предельных случаях найденные выше поляризационные соотношения переходят в известные выражения для бесселевых или гауссовых световых пучков. Действительно, полагая в (8), (9), (12), (17 - 11) $k'_\perp \to 0;\ J_m, J_{m\pm 1},\ Q \to 1,$ получаем гауссовы моды [11-13]. При $Q \to 1, \quad l \to \infty, \quad k'_\perp \to k_\perp$ приходим к бесселевым модам [2], [8 - 10].

2. В (4) и (5) мы применяли магнитный вектор Герца и получали бессель-гауссовы моды $\boldsymbol{E}$-типа. Аналогично можно вводить электрический вектор Герца условием $\boldsymbol{H} = [\nabla, \boldsymbol{f}\,]$ и далее вычислять моды $\boldsymbol{H}$-типа. Но уравнения Максвелла инвариантны относительно замен $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H}, \quad \varepsilon \leftrightarrow (-\mu)$. Поэтому проще, используя отмеченную выше инвариантность, из соотношений для мод $\boldsymbol{E}$-типа сразу получать аналогичные соотношения для мод $\boldsymbol{H}$-типа.

3. В работе [6] автор, используя сложный и громоздкий подход, получил выражение для продольного потока энергии S_z бессель-гауссовых *TE*-мод, которое обладает азимутальными зависимостями от номера моды *m.* Авторы в [5], [6] фактически рассматривали бессель-гауссовы моды с азимутальными зависимостями для функций Бесселя в форме $J_m \cos(m\varphi)$ или $J_m \sin(m\varphi)$, Мы, однако, применяли зависимость $J_m e^{im\varphi}$, а не зависимость работ [5], [6]. Поэтому у нас в энергетических соотношениях исчезает азимутальная зависимость от номера моды *m* пучка, что приводит к их существенному упрощению по сравнению с [5], [6].

4. Одновременно с [6] вышла работа Холла и др. [5], в которой для первого теоретического объяснения картин бессель-гауссовых мод, испускаемых полупроводниковым лазером [4], [5], была предложена модель, в которой векторная амплитуда поля фактически описывается суперпозицией четырех PPE_x и PPE_y мод. Такая модель была выбрана, чтобы на оси пучка было $div\,\boldsymbol{E} = 0$. Явные выражения [5] для поляризации бессель-гауссовых пучков поэтому представлены в излишне сложной форме и обладают сложными азимутальными зависимостями. В [5] не были найдены также продольные компоненты полей и поперечные потоки энергии. Кроме того, моды [5] можно приближенно рассматривать, как линейно поляризованные только в ближней зоне при $z \ll L$. Примененный нами подход является более простым и в тоже время более общим. Заметим, наконец, что эксперимент [4] также можно объяснить проще, чем в [5]; достаточно взять одну *PPE*-моду, например, в виде $E_x = J_m \cos(m\varphi)\, G\, Q$.

Заключение

В настоящей работе с помощью модифицированного формализма векторных потенциалов Герца получены общие векторные соотношения, описывающие поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных бессель-гауссовых пучков света для различных мод в однородных изотропных средах. Показано, что в предельных случаях найденные выражения сводятся к гауссовым или бесселевым векторным световым модам.

Установлено, что векторы поля зависят от функций Бесселя пяти порядков J_m, $J_{m\pm1}$, $J_{m\pm2}$, т.е. световые бесселевы пучки обладают сложной неоднородной по сечению пучка поляризационной структурой, более сложной, чем в изотропной среде.

Найденные результаты могут быть использованы при расчетах преобразования бессель-гауссовых пучков различными оптическими системами и могут служить теоретической базой при соответствующих экспериментальных исследованиях. Отметим также возможные применения в линейной и нелинейной оптике.

Abstract. On the basis of a modified formalism of the vector potentials of the Hertz the general solutions of the parabolic equation describing vector the Bessel-Gaussian beams of light in homogenous mediums are obtained. Polarization and energy properties of various modes of such beams are found and are analyzed.

Литература

1. J. Durnin, Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory, J. Opt. Soc. Am. A, **4**, № 4 (1987), 651–654.

2. S. S. Girgel, S. N. Kurilkina, Vectorial of Bessel light beams, Proc. SPIE, **4358** (2001), 258-264.

3. F. Gori, G. Guattari, Bessel–Gauss beams, Optics Communs. , **64**, № 6 (1987), 481–495.

4. R. H. Jourdan, D. G. Hall, O. King, G. Wick and S. Rishton, Lasing behavior of circular grating surface-emitting semiconductor lasers, J. Opt. Soc. Am. B, **14**, (1997), 449–453.

5. Greene P. L. , Hall D. G. , Properties and diffraction of vector Bessel–Gauss beams, **15**, № 12, (1998), 3020–3027.

6. S. R. Seshadri, Electromagnetic Gaussian beam, J. Opt. Soc. Am. A, **15**, № 22 (1987), 2712–2719.

7. С. С. Гиргель, Поляризационные свойства Бессель-гауссовых пучков света, Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, № 6(9) (2001), 149-154.

8. С. С. Гиргель, Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей, там же, 146-149.

9. K. Shimoda, Exact solutions of field vectors of diffraction-free electromagnetic waves, Journ. Phys. Soc. Japan, **60**, №. 2 (1991), 450 – 454.

10. С. С. Гиргель, Световые пучки Бесселя в одноосных кристаллах. I. Моды о-типа, Материалы Международной конференции «Лазерная физика и применения лазеров», Беларусь, г. Минск,14-16 мая 2003 г. , 78-79.

11. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Москва, Радио и связь, 1988.

12. K. Shimoda, Vectorial analysis of the gaussian beams of light, Journ. Phys. Soc. Japan, **60**, № 1 (1991), 141 – 145.

13. А. Ю. Ардашев, В. А. Кашин, Г. В. Скроцкий, Классическая теория неидеальных когерентных световых пучков, **55,** № 3 (1068), 869-865.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.09.06