Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **2**, 2006

УДК

Уравнения Дайсона-Швингера и свойства ρ-мезона

О. П. Соловцова

Введение. В современной теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамике (КХД), непертурбативные эффекты играют решающую роль как с точки зрения ответа на фундаментальные вопросы, например, объяснение конфайнмента кварков и глюонов, так и для описания феноменологии адронов и соотнесении теоретических результатов с экспериментальными данными. Разработке непертурбативных методов в квантовой теории поля уделяется большое внимание. Одно из направлений основано на использовании непертурбативных решений уравнений Дайсона-Швингера (ДШ). В данной работе предложен подход определения характеристик ρ-мезона в рамках метода правил сумм КХД [1,2] на основе решений уравнений ДШ.

Непертурбативный инвариантный заряд и масса кварков. В широко распространенных потенциальных моделях, описывающих свойства систем из легких кварков, используется, так называемая, конституентная масса кварка, величина которой имеет порядок 300 МэВ. Наряду с этим в КХД расчетах используются массы токовых кварков, имеющие на масштабе $1 \div 2$ ГэВ значения порядка нескольких МэВ (масса u-кварка составляет $1{,}5 \div 4$ МэВ, а d-кварка $4 \div 8$ МэВ [3]). Взаимосвязь между конституентной и токовой массами носит непертурбативный характер и в настоящее время не достаточно изучена. Для анализа этой проблемы используем непертурбативные решения уравнений ДШ. На основе таких решений в работах [4,5,6] (см. также обзор [7]) были получены зависимости инвариантного заряда и массовой функции легких кварков от безразмерного импульсного аргумента x. Для того чтобы соотнести безразмерный аргумент x с физическим импульсным масштабом привлекается дополнительная информация, например, проводится нормировка на какие-то экспериментальные значения. На рис. 1 и 2 представлены результаты решений уравнений ДШ, а сплошные линии – это результат фитирования.

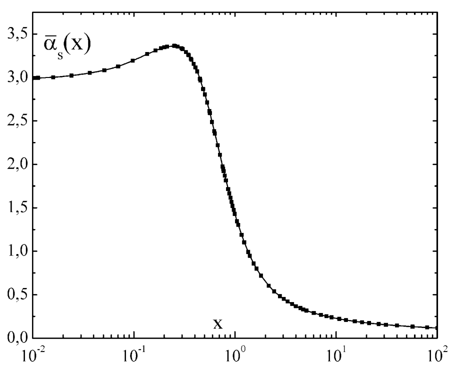

Рисунок 1 – Инвариантный заряд

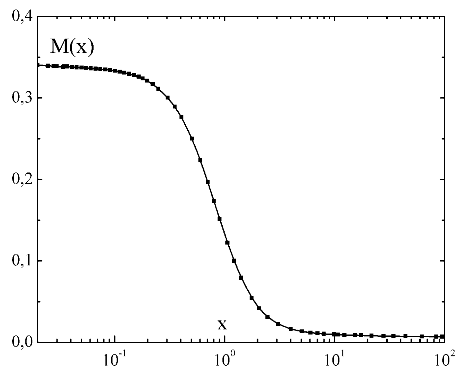

Рисунок 2 – Массовая функция

Рис. 1 демонстрирует конечное значение инвариантного заряда в инфракрасной области. Аналогичная инфракрасная “заморозка” возникает и в ряде теоретических методов, например, в предложенном в [8,9] методе непертурбативного a- разложения и в аналитическом подходе в КХД [10,11].

Схемы перенормировок. Существуют различные ренормировочные предписания, но нет каких-либо общих принципов, основываясь на которые можно было бы отдать предпочтение какой-то схеме перенормировок. Выбор схемы, как правило, связан с конкретной задачей. Получим правила пересчета от одной используемой схемы перенормировки к другой. Здесь нам понадобится фактор пересчета от MOM ренормализационной схемы, которая использовалась в решеточных расчетах [12], к модифицированной схеме минимальных вычитаний $\overline{MS}$. Этот фактор регулирует импульсный масштаб и связывает масштабные параметры КХД Λ в MOM и $\overline{MS}$ схемах следующим образом

$$\Lambda^2_{\overline{MS}} = k^{-1}_{MOM\to\overline{MS}} \Lambda^2_{MOM} \,. \tag{1}$$

где

$$k_{MOM\to\overline{MS}} = \exp\left(\frac{70}{3\beta_0}\right), \tag{2}$$

$\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ – однопетлевой коэффициент ренормгрупповой β-функции.

При суммировании пороговых сингулярностей, которое проводится в этой работе, требуется переход к V схеме [13]. Соответствующая взаимосвязь масштабных параметров имеет вид

$$\Lambda^2_V = k^{-1}_{\overline{MS}\to V} \Lambda^2_{\overline{MS}} \,, \qquad k_{\overline{MS}\to V} = \exp\left(-\frac{7}{\beta_0}\right). \tag{3}$$

Переход от безразмерного аргумента x, который фигурирует в решениях уравнений ДШ, к размерным физическим величинам осуществляется с помощью некоторого масштабного параметра η, который появляется и в уравнении для полюсной массы кварка m, определяемой как положение полюса кваркового пропагатора: $M_{ДШ}(\eta m^2) - m = 0$.

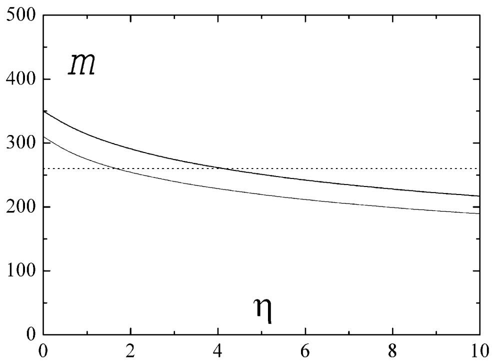

Рис. 3. Полюсная масса кварка m как функция параметра η.

На рис. 3 приведен график полюсной массы кварка в зависимости от величины параметра η. Заштрихованный коридор соответствует набору кривых, для различных точек нормировки. Как видно из этого рисунка, значение полюсной массы слабо зависит от величины параметра η. Выберем “среднее” значение полюсной массы равным 260 МэВ (пунктирная линия на рис. 3). Это значение использовалось в разных подходах, например, в работах [14–17] и определялось из условия согласия результатов теоретических расчетов с соответствующими экспериментальными данными.

Для инвариантного заряда с учетом масштабного параметра η возникают следующие правила схемного пересчета

$$\bar{\alpha}_{MOM}(Q^2) = \bar{\alpha}_{ДШ}(\eta Q^2), \tag{4}$$

$$\bar{\alpha}_{\overline{MS}}(Q^2) = \bar{\alpha}_{MOM}(k_{MOM\to\overline{MS}} Q^2) = \bar{\alpha}_{ДШ}(\eta k_{MOM\to\overline{MS}} Q^2), \tag{5}$$

$$\bar{\alpha}_V(Q^2) = \bar{\alpha}_{\overline{MS}}(k_{\overline{MS}\to V} Q^2) = \bar{\alpha}_{ДШ}(\eta k_{MOM\to\overline{MS}} k_{\overline{MS}\to V} Q^2). \tag{6}$$

Полученные выражения могут быть использованы для определения непертурбативного вклада подобно тому, как это делается при анализе результатов решеточных расчетов [12]. Выделяя в (4) обычное пертурбативное слагаемое и ведущий непертурбативный вклад в виде степенной поправки c_1/Q^2, находим, что в результате фитирования данных, полученных на основе решения уравнений ДШ, в области $1,2 < Q < 10,0$ ГэВ величина параметра составляет $c_1 \simeq 0,51\,\text{ГэВ}^2$, что находится в хорошем согласии со значением, полученным при решеточных вычислениях: $c_1^{\text{lattice}} = 0,63^{+0,03}_{-0,16}$ ГэВ^2 [12].

Подход. Для описания характеристик ρ- мезона в методе правил сумм КХД необходимо получить выражение для мнимой части коррелятора кварковых токов $R(s)$, причем и в низкоэнергетической области, где теория возмущений (ТВ) встречает серьезные трудности. Одна из этих проблем обусловлена сингулярностями вблизи порога рождения кварковой пары, где нельзя ограничиться конечным порядком ТВ, поскольку в пертурбативном разложении участвует не просто степени α_s, а присутствуют также степени сингулярного фактора 1/v, где v –скорость кварка. Такие пороговые сингулярности должны быть просуммированы. Для электродинамических систем в нерелятивистском случае это суммирование осуществляет S-фактор. При описании системы легких кварков нерелятивистское выражение неприемлемо. Релятивистское обобщение S-фактора в КХД было получено в работе [17]. Учет S-фактора приводит к модификации выражения для R - функции [18]. После модификации лидирующий "потенциальный" вклад становится доминирующим, а относительный вклад поправки достаточно мал на широком энергетическом интервале. В то время как при использовании ТВ, вклад поправки растет при уменьшении энергетического масштаба и ТВ теряет свою применимость в низкоэнергетической области. Впервые такая модификация была проделана в работе [18] в рамках аналитического подхода [10,11]. Здесь же мы расширяем такой подход на случай, когда инвариантный заряд и массовая функция легких кварков получены на основе непертурбативных решений уравнений ДШ (см. рис. 1 и 2).

ρ-мезон. Метод правил сумм КХД опирается на использование некоторого модельного выражения для $R(s)$ в терминах адронных параметров. Так же, как и в [1,2], будем использовать

$$R^h(s) = \frac{2\pi}{g_\rho^2} m_\rho^2 \delta(s - m_\rho^2) + \left(1 + \frac{\alpha_s^{(0)}}{\pi}\right)\theta(s - s_0) \tag{7}$$

с параметрами $\alpha_s^{(0)} = 0,4 \div 0,5$ и $s_0 \simeq 1,5$ ГэВ^2. Экспериментальные значения параметров ρ^0-мезона таковы: $m_\rho = 775,8 \pm 0,5$ МэВ – масса, $g_\rho^2 = 2,36 \pm 0,16$ [3].

Борелевские правила сумм следуют из выражений для моментов

$$M_0(M^2) = \frac{2\pi}{g_\rho^2} m_\rho^2 \exp\left(-\frac{m_\rho^2}{M^2}\right) + \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) M^2 \exp\left(-\frac{s_0}{M^2}\right), \tag{8}$$

$$M_1(M^2) = \frac{2\pi}{g_\rho^2} m_\rho^4 \exp\left(-\frac{m_\rho^2}{M^2}\right) + \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) M^4 \left(1 + \frac{s_0}{M^2}\right) \exp\left(-\frac{s_0}{M^2}\right). \tag{9}$$

Моменты определены следующим образом

$$M_k(M^2) = \int_0^\infty ds\, s^k \exp\left(-\frac{s}{M^2}\right) R(s), \tag{10}$$

где M есть борелевский параметр. Из (8) и (9) для массы ρ-мезона получаем

$$m_\rho^2 = \frac{M_1(M^2) - (1 + \alpha_s/\pi) M^4 \left(1 + s_0/M^2\right) \exp\left(-s_0/M^2\right)}{M_0(M^2) - (1 + \alpha_s/\pi) M^2 \exp\left(-s_0/M^2\right)}. \tag{11}$$

Для константы $g_\rho^2(M)$, связанной с электронной шириной распада, возникает два выражения

$$g_{\rho 1}^2 = \frac{2\pi\, m_\rho^2 \exp\left(-m_\rho^2/M^2\right)}{M_0(M^2) - M^2\left(1+\alpha_s/\pi\right)\exp\left(-s_0/M^2\right)}, \tag{12}$$

$$g_{\rho 2}^2 = \frac{2\pi\, m_\rho^4 \exp\left(-m_\rho^2/M^2\right)}{M_1(M^2) - M^2\,(s_0+M^2)\left(1+\alpha_s/\pi\right)\exp\left(-s_0/M^2\right)}. \tag{13}$$

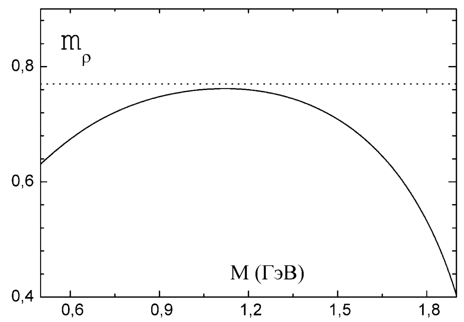

Рис. 4. Поведение $m_\rho(M)$, полученное на основе (11). Горизонтальная линия соответствует экспериментальному значению массы ρ-мезона.

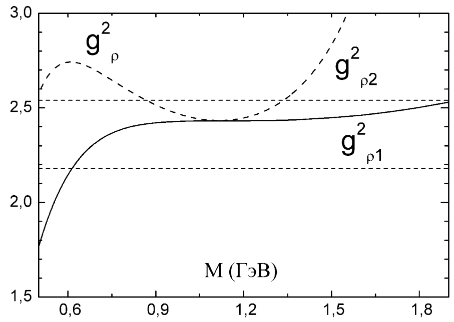

Рис. 5. Функции $g_\rho^2(M)$, определенные в (12) и (13). Горизонтальные линии обозначают экспериментальный коридор.

Результаты, которые получаются из выражений (11), (12) и (13) представлены на рис. 4 и 5. Значения параметров ρ-мезона в области стабильности таковы: $m_\rho = 763\,\mathrm{MeV}$ и $g_\rho^2 = 2{,}43$. Эти величины хорошо согласуются с приведенными выше экспериментальными данными.

Заключение. Сформулируем основные результаты. Показано, что массовая функции, возникающая в результате непертурбативного решения уравнений ДШ, приводит, с одной стороны, к величине полюсной массы кварка, близкой к конституентной, а, с другой стороны, при больших значениях импульсного аргумента становится малой, что соответствует понятию токовой массы кварка.

Предложен подход определения характеристик ρ-мезона с использованием непертурбативных решений уравнений ДШ. Показано, что развитый метод позволяет хорошо воспроизвести значения массы и электронной ширины распада ρ-мезона без явного введения глюонного и кваркового конденсатов.

Работа выполнена в рамках ГПФИ “Поля и частицы" и Программы сотрудничества между учреждениями Республики Беларусь и Международной межправительственной организацией “Объединенный институт ядерных исследований".

Abstract.

Литература

1. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I., Nucl. Phys. B. – 1979. – Vol. 147, № 5. – P. 385-534.

2. Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S., Phys. Rep. – 1985. – Vol. 127, № 1. – P. 1-97.

3. Particle Data Group, Eidelman S. et al., Phys. Lett. B. – 2004. – Vol. 592. – P. 1.
4. Fisher C.S., Alkofer R., Phys. Lett. B. – 2002. – Vol. 536, № 1-2. – P. 177-184.
5. Bloch J.C., Phys. Rev. D. – 2001. – Vol. 64, № 11.– Art. 116011. – P. 1-11.
6. Fisher C.S., Alkofer R., Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67, № 9. – Art. 094020. – P. 1-21.
7. Alkofer R., von Smekal L., Phys. Rept. – 2001. – Vol. 353, № 5-6. – P. 281-465.
8. Solovtsov I.L., Phys. Lett. B. – 1994. – Vol. 327, № 4. – P. 335-340.
9. Solovtsov I.L., Phys. Lett. B. – 1994. – Vol. 340, № 4. – P. 245-249.
10. Shirkov D.V., Solovtsov I.L., Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79, № 7. – P. 1209-1212.
11. Соловцов, И.Л., Ширков Д.В.// Теоретическая и математическая физика. – 1999. – Т. 120, № 3. – С. 482-510.
12. Boucaud P. et al., J. High Energy Phys. – 2000. – Vol. 004, Art. № 006.
13. Fischler W., Nucl. Phys. B. – 1977. – Vol. 129, № 1. – P. 157-174; Appelquist T., Dine M., Muzinich I.J., Phys. Lett. B. – 1977. – Vol. 69, № 2. – P. 231-236.
14. Sanda A.I., Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 42, № 25. – P. 1658-1661.
15. Sakurai J.J., Scilcher K., Tran M.D., Phys. Lett. B. – 1981. – V. 102, № 1. – P. 55-58.
16. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. // Письма в ЖЭТФ. – 2001. – Т. 73, № 4. – С. 186-189.
17. Milton K. A., Solovtsov I.L., Mod. Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 16, № 34. – P. 2213-2219.
18. Milton K.A., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P., Phys. Rev. D. – 2001. – Vol. 64, № 1. – P. 016005-1 – 016005-6.

Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого

Поступило