

Точное решение задачи дифракции на крестовидной прямоугольной структуре

В. В. КОРНЕЙЧИК¹, Т. М. КОРНЕЙЧИК²

В работе [1] получено точное решение задачи дифракции на границах раздела четырех однородных сред, каждая из которых заполняет одну из четвертей пространства (в двумерной дифракционной задаче – один из квадрантов плоскости). Взяв данное решение в качестве исходного, перейдем к рассмотрению более сложных структур. Вначале кратко изложим сведения, необходимые для этого. На рис. 1 показана геометрия исходной задачи [1], параметры сред и ход волн.

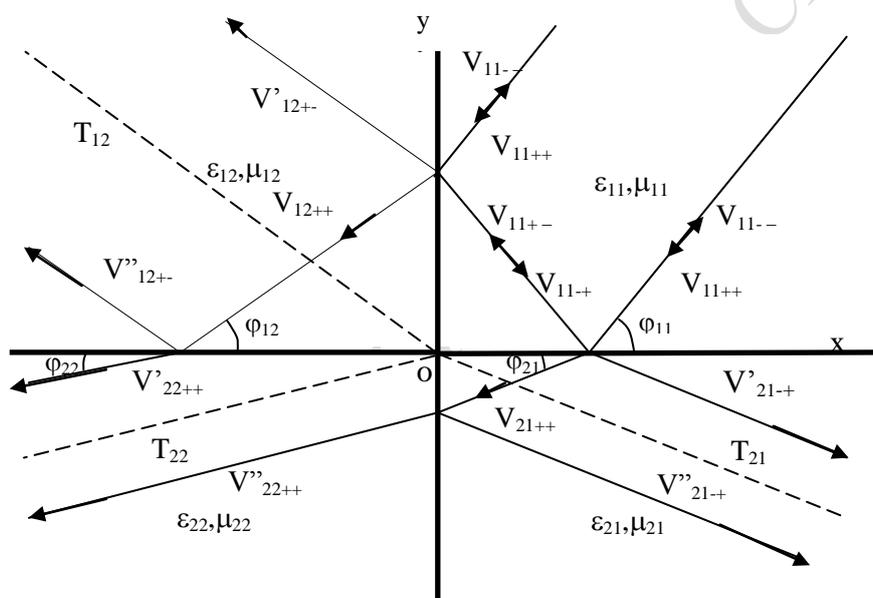


Рис.1

При выполнении углового условия согласования

$$\varepsilon_{j,l}\mu_{j,l} + \varepsilon_{j+1,l+1}\mu_{j+1,l+1} = \varepsilon_{j,l+1}\mu_{j,l+1} + \varepsilon_{j+1,l}\mu_{j+1,l} \quad (1)$$

общего для обеих поляризаций, а также амплитудно-фазовых условий:

$$\varepsilon^2_{j,l}\varepsilon^2_{j+1,l+1} = \varepsilon^2_{j+1,l}\varepsilon^2_{j,l+1} \quad (2_\varepsilon)$$

для H -поляризации ($V^H \equiv H_z$) и/или взаимного ему условия

$$\mu^2_{j,l}\mu^2_{j+1,l+1} = \mu^2_{j+1,l}\mu^2_{j,l+1} \quad (2_\mu)$$

для E -поляризации ($V^E \equiv E_z$), при дифракции исходной волны $V_{11+-}^{H,E}$ (падающей из первого квадранта – области 11) получается решение

$$V^{H,E} = \bigcup_{jl} V_{jl}^{H,E} = \bigcup_{jl} \sum_{\alpha,\beta=\pm,-} A_{jl\alpha\beta}^{H,E} \exp[-ikn_{jl}(\alpha x \cos \varphi_{jl} + \beta y \sin \varphi_{jl})], \quad (3)$$

где $A_{jl\alpha\beta}^{H,E}$ – постоянные амплитудно-фазовые множители, k – волновое число в вакууме, $n_{jl} = \sqrt{\varepsilon_{jl}\mu_{jl}}$ – показатели преломления сред; углы φ_{jl} отсчитываются против часовой

стрелки от положительного направления оси x до направления, с которого приходит волна, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ подразумеваем.

Столь простой вид решения обусловлен тем, что при выполнении условия (1) совпадают направления распространения волн V'_{22++} и V''_{22++} , а при выполнении еще и условий (2_ε) и (или) (2_μ) – и амплитуды и фазы частей волн, распространяющихся по разные стороны от терминаторов T_{12}, T_{22} и T_{21} . При этом для границы $x=0$ получается, что коэффициенты отражения и прохождения для угла падения φ_{11} в первом квадранте совпадают с соответствующими коэффициентами для угла падения φ_{21} в четвертом квадранте; аналогично для границы $y=0$. Это и дает возможность ввести единые для всей границы (но с учетом связанных прохождением через другую границу углов падения) коэффициенты, связывающие амплитуды инициированных волн с амплитудой исходной волны:

$$Rp_{y=0}^{H,E} = \frac{\eta_{11}^{H,E} n_{21} \sin \varphi_{11} - \eta_{21}^{H,E} \sqrt{n_{21}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}}}{\eta_{11}^{H,E} n_{21} \sin \varphi_{11} + \eta_{21}^{H,E} \sqrt{n_{21}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}}}, Tp_{y=0}^{H,E} = 1 + Rp_{y=0}^{H,E},$$

$$Rp_{x=0}^{H,E} = \frac{\eta_{11}^{H,E} n_{12} \cos \varphi_{11} - \eta_{12}^{H,E} \sqrt{n_{12}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}}}{\eta_{11}^{H,E} n_{12} \cos \varphi_{11} + \eta_{12}^{H,E} \sqrt{n_{12}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}}}, Tp_{x=0}^{H,E} = 1 + Rp_{x=0}^{H,E},$$

где $\eta_{jl}^H = \sqrt{\mu_{jl}\mu_0 / \varepsilon_{jl}\varepsilon_0}$ – волновое сопротивление, $\eta_{jl}^E = (\eta_{jl}^H)^{-1} = \sqrt{\varepsilon_{jl}\varepsilon_0 / \mu_{jl}\mu_0}$ – волновая проводимость среды области jl ; буква p указывает, что падение происходит со стороны положительного направления оси, перпендикулярной этой границе. Напомним также, что зависимость от тангенциальной координаты для падающей, отраженной и прошедшей волны одна и та же. Как параметры сред, так и углы распространения волн могут быть комплексными – граничные условия выполняются.

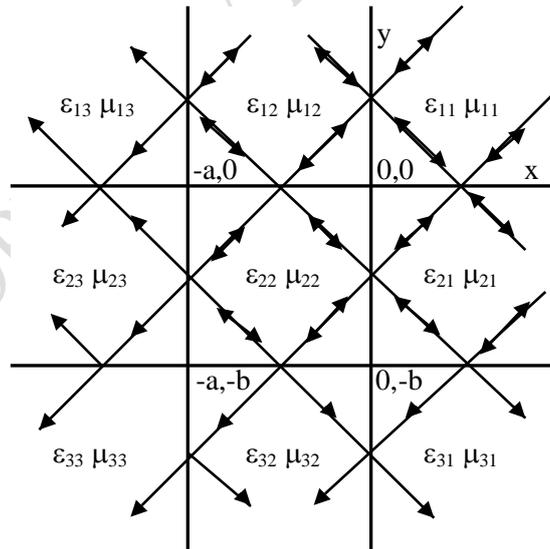


Рис.2

Основываясь на изложенном выше, усложним геометрию задачи – проведем новые границы $y=-b$ и $x=-a$ (рис.2) и заполним пять новых областей средами таким образом, чтобы для каждой четверки областей, имеющих общую вершину, выполнялись условия согласования (1)-(2). Для этого можно, например, произвольно задать проницаемости для пяти областей, составляющих первую строку и первый столбец структуры, а параметры оставшихся четырех областей найти из уравнений (1)-(2). Например, поместив по углам среду с $n=1$, а в плечах креста – с $n=\sqrt{2}$, получаем перекрестье с $n=\sqrt{3}$.

При взаимодействии исходной плоской волны (по-прежнему $V_{11++}^{H,E}$) со структурой в каждой из областей последней инициируется до четырех плоских волн (рис.2) – дифракционные волны в силу согласования не возникают, то есть выполнение граничных условий и непрерывность полей в областях обеспечиваются минимальным дискретным угловым спектром и решение имеет вид (3). Для простоты на рис.2 приведена картина волн для $a=b$ и $\varphi_{11} = \pi/4$ в случае равенства показателей преломления всех областей структуры – она вполне достаточна и удобна для иллюстрации принципиальных моментов получения решения дифракционной задачи. Видно, что общее количество волн равно 25 – по четыре волны в областях 11,12, 21 и 22, составляющих первый квадрант с вершиной в точке $(-a,-b)$, по две – в областях 13, 23, 32 и 31 (второй и четвертый квадранты) и одна – в области 33 (третьем квадранте).

Для нахождения амплитуд инициированных волн воспользуемся знанием решения для ключевой структуры рис.1: в каждой четверке областей с правой верхней областью jl исходными (только падающими на внутренние границы) являются волны $V_{jl++}^{H,E}, V_{j,l+1,-+}^{H,E}, V_{j+1,l+1,-}^{H,E}$ и $V_{j+1,l,+}^{H,E}$. Поэтому амплитуды остальных волн четверок областей с помощью коэффициентов отражения и прохождения выразим через амплитуды исходных волн, получив систему линейных уравнений, состоящую из четырех подсистем. При этом используются коэффициенты отражения и прохождения для границ $x=0$ и $y=0$ со стороны отрицательных направлений соответствующих – ортогональных им – осей:

$$Rm_{x,y=0}^{H,E} = -Rp_{x,y=0}^{H,E}, Tm_{x,y=0}^{H,E} = 1 - Rp_{x,y=0}^{H,E},$$

а также для границ $y=-b$ и $x=-a$:

$$Rp_{y=-b}^{H,E} = \frac{\eta_{21}^{H,E} n_{31} \sqrt{n_{21}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}} - \eta_{31}^{H,E} n_{21} \sqrt{n_{31}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}}}{\eta_{21}^{H,E} n_{31} \sqrt{n_{21}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}} + \eta_{31}^{H,E} n_{21} \sqrt{n_{31}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}}} \exp(2ikb \sqrt{n_{21}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}}),$$

$$Tp_{y=-b}^{H,E} = \frac{2\eta_{21}^{H,E} n_{31} \sqrt{n_{21}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}}}{\eta_{21}^{H,E} n_{31} \sqrt{n_{21}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}} + \eta_{31}^{H,E} n_{21} \sqrt{n_{31}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}}} \cdot \exp\left[ikb(\sqrt{n_{21}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}} - \sqrt{n_{31}^2 - n_{11}^2 \cos^2 \varphi_{11}})\right],$$

$$Rp_{x=-a}^{H,E} = \frac{\eta_{12}^{H,E} n_{13} \sqrt{n_{12}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}} - \eta_{13}^{H,E} n_{12} \sqrt{n_{13}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}}}{\eta_{12}^{H,E} n_{13} \sqrt{n_{12}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}} + \eta_{13}^{H,E} n_{12} \sqrt{n_{13}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}}} \exp(2ika \sqrt{n_{12}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}}),$$

$$Tp_{x=-a}^{H,E} = \frac{2\eta_{12}^{H,E} n_{13} \sqrt{n_{12}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}}}{\eta_{12}^{H,E} n_{13} \sqrt{n_{12}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}} + \eta_{13}^{H,E} n_{12} \sqrt{n_{13}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}}} \cdot \exp\left[ika(\sqrt{n_{12}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}} - \sqrt{n_{13}^2 - n_{11}^2 \sin^2 \varphi_{11}})\right].$$

Решение упомянутой системы дает выражения для амплитуд инициированных волн через амплитуду исходной волны и коэффициенты отражения и прохождения границ структуры. Выпишем решение для волны, прямо прошедшей через структуру (верхние индексы H, E подразумеваются):

$$A_{33++} = \frac{Tp_{x=0} Tp_{x=-a} Tp_{y=0} Tp_{y=-b}}{(1 - Rm_{x=0} Rp_{x=-a})(1 - Rm_{y=0} Rp_{y=-b})} A_{11++} \quad (4)$$

Как видно из этого выражения, в числителе коэффициента прямого прохождения через структуру стоит произведение коэффициентов прохождения всех четырех границ, а знаменатель учитывает наличие переотражений внутри второго столбца и второй строки. Для волны, отраженной в обратном направлении, имеем

$$A_{11--} = \left[Rp_{y=0}Rp_{x=0} + \frac{Tp_{x=0}Rp_{y=0}Rp_{x=-a}Tm_{x=0}}{1 - Rm_{x=0}Rp_{x=-a}} + \right. \\ \left. + \frac{Tp_{x=0}Tp_{y=0}Rp_{x=-a}Rp_{y=-b}Tm_{x=0}Tm_{y=0}}{(1 - Rm_{x=0}Rp_{x=-a})(1 - Rm_{y=0}Rp_{y=-b})} + \frac{Tp_{y=0}Rp_{x=0}Rp_{y=-b}Tm_{y=0}}{1 - Rm_{y=0}Rp_{y=-b}} \right] A_{11++} \quad (5)$$

Из (5) видно, что в результирующую амплитуду дают вклад четыре пути, определяемые соответствующими коэффициентами отражения и прохождения (см. рис.2). Опять, как и в (4), при прохождении через вторую строку и/или второй столбец появляются соответствующие знаменатели, которые учитывают вклад от переотражений внутри этих составных слоев. Поскольку, как уже упоминалось выше, каждая граница характеризуется, в смысле данной задачи, единичными для расположенных вдоль одной ее стороны областей коэффициентами отражения и прохождения, то отдельный путь характеризуется только набором коэффициентов – порядок прохождения границ не имеет значения.

Аналогичным образом можно, пользуясь рис.2, получить амплитуду любой из волн, суммируя вклады от минимальных вариантов путей, по которым исходная волна может перейти в эту волну.

Переходя к анализу результатов, необходимо отметить, что, как и в исходной задаче, согласование параметров сред – теперь уже и независимо от геометрических размеров областей – приводит к тому, что прошедшая структура волна является плоской, то есть присутствие четырех вершин, в каждой из которых сходятся по четыре различных среды, не приводит, вопреки обыкновению, к дифракционным искажениям.

Интересно, что условия согласования (1)-(2) можно записать в виде условий разделения:

$$n^2(x, y) = n^2(x) + n^2(y), \\ \varepsilon^2(x, y) = \varepsilon^2(x)\varepsilon^2(y), \\ \mu^2(x, y) = \mu^2(x)\mu^2(y).$$

То есть для произведений проницаемостей имеет место аддитивное, а для самих проницаемостей – мультипликативное разделение переменных. Следовательно, локальное согласование параметров сред приводит в глобальном смысле к разделению переменных в зависимостях этих параметров от координат.

Таким образом, согласование параметров сред позволяет получать простые точные решения для дифракции на достаточно сложных структурах. При этом амплитудно-фазовые коэффициенты отдельных волн можно находить, суммируя вклады от различных путей, определяемых по схеме распространения волн. По известному решению для дифракции одной исходной плоской волны стандартным методом получают решения для произвольной исходной волны, представленной в виде суперпозиции плоских волн. Для скалярных волн решение получается путем замены в коэффициентах отражения и прохождения волновых сопротивлений на показатели преломления. Представленную структуру можно развивать, добавляя новые согласованные области.

Abstract. The exact solution of a problem of diffraction of a plane wave on the crosswise structure consisting of rectangular areas filled by homogeneous media with coordinated parameters is obtained.

Литература

1. В. В. Корнейчик, Дифракция в согласованных квадрантах//Труды международной конференции “Излучение и рассеяние ЭМВ – ИРЭМВ-2005”. – Таганрог, 2005. – с.324-326.

¹Минский НИИ радиоматериалов
e-mail: korneichikvv@yandex.ru

Поступило 11.09.06

²НИИ прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко
Белгосуниверситета