Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(38), 2006

Математика

УДК 517.925

Структурная устойчивость вещественных линейных систем и уравнений Риккати с периодическими коэффициентами

В. Ю. Тыщенко

В работе [1] проводилась топологическая классификация комплексных линейных систем с переменными, в том числе и с периодическими, коэффициентами. В данной заметке рассмотрим аналогичную задачу для вещественных линейных систем с периодическими коэффициентами. Затем, используя полученные результаты и результаты из [2], на основании отражающей функции В. И. Мироненко [3] рассмотрим вопрос о структурной устойчивости вещественных линейных систем и уравнений Риккати с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим линейные дифференциальные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x \tag{2}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = C(t,\mu)x, \tag{3}$$

где $x = colon(x_1,\ldots,x_n)$, квадратные матрицы $A(t) = ||a_{ij}(t)||$, $B(t) = ||b_{ij}(t)||$ и $C(t,\mu) = ||c_{ij}(t,\mu)||$ размера n с элементами $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c_{ij} : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$, гладкими по своим аргументам и 2–периодическими по первому, интервал $M \subset \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $C(t,0) = A(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \in M$, μ есть малый параметр. Системы (1), (2) и (3) определяют, соответственно, накрывающие слоения [4] F^1, F^2 и F^3_μ на многообразии $\mathbb{R}^n \times S^1$, где S^1 есть окружность. Будем говорить, что системы (1) и (2) **топологически эквивалентны**, если существует гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^n \times S^1 \to \mathbb{R}^n \times S^1$, переводящий слои слоения F^1 в слои слоения F^2. Систему (1) будем называть **структурно устойчивой**, если она топологически эквивалентна системе (3) при всех достаточно малых значениях $|\mu|$.

Для решения поставленных выше задач топологической классификации и структурной устойчивости будем рассматривать преобразования голономии [4] на пространстве $\mathbb{R}^n$ систем (1) – (3). Они определяются, соответственно, линейными операторами Px, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $P \in GL(n,\mathbb{R})$; Qx, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Q \in GL(n,\mathbb{R})$; и $R_\mu x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $R_\mu \in GL(n,\mathbb{R})$, полученными на основании отображений за период (отображений Пуанкаре) линейных систем (1)-(3). В дальнейшем **сильно гиперболическими** будем называть матрицы, у которых все собственные значения различны между собой и по модулю отличны от единицы.

Теорема 1. *Пусть вещественная нормальная жорданова форма сильно гиперболической матрицы* $P \in GL(n,\mathbb{R})$ *имеет вид* $J(P) = \begin{pmatrix} J_s(P) & 0 \\ 0 & J_u(P) \end{pmatrix}$, *где* *все собственные значения матрицы* $J_s(P)$ *по модулю меньше* 1, *а все собственные значения матрицы* $J_u(P)$ *по модулю больше* 1, $p = dim\ J_s(P)$; *вещественная нормальная жорданова форма сильно гиперболической матрицы* $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ *имеет вид* $J(Q) = \begin{pmatrix} J_s(Q) & 0 \\ 0 & J_u(Q) \end{pmatrix}$, *где все собственные значения матрицы* $J_s(Q)$ *по модулю меньше* 1, *а все собственные значения матрицы* $J_u(Q)$ *по модулю больше* 1, $q = dim\ J_s(Q)$.

Тогда системы (1) *и* (2) *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда либо* $p = q$, $det\ J_s(P)\ det\ J_s(Q) > 0$, $det\ J_u(P)\ det\ J_u(Q) > 0$, *либо* $p = n - q$, $det\ J_s(P)\ det\ J_u^{-1}(Q) > 0$, $det\ J_u(P)\ det\ J_s^{-1}(Q) > 0$.

Доказательство. Согласно теореме 7 из [4], топологическая эквивалентность систем (1) и (2) равносильна топологической сопряженности действий на пространстве $\mathbb{R}^n$ линейных операторов (или просто топологической сопряженности линейных операторов), определяемых либо матрицами P и Q, либо матрицами P и Q^{-1}, т.е. существования такого гомеоморфизма $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что либо $\xi(Px) = Q\xi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, либо $\xi(Px) = Q^{-1}\xi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Нетрудно видеть, что для линейных операторов размерности устойчивого и неустойчивого инвариантных подпространств и ориентации (положительные или отрицательные) сужений на эти инвариантные подпространства являются инвариантами при топологической сопряженности. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать сопряженность между вещественными нормальными жордановыми формами вышеуказанных линейных операторов и линейным оператором, определяемым одной из канонических матриц $diag\{\varepsilon e^{-1}, e^{-1}, \ldots, e^{-1}, \delta e, e, \ldots, e\}$, где $\varepsilon^2 = 1$, $\delta^2 = 1$ (такой линейный оператор будем называть каноническим).

Для завершения доказательства приведем сопрягающие с каноническими линейными операторами гомеоморфизмы пространств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ для сужений на устойчивые и неустойчивые инвариантные подпространства линейного оператора, соответствующего сильно гиперболической матрице:

1) гомеоморфизм $x_1 \to x_1|x_1|^{-\frac{1}{ln\ \lambda_1}-1}$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, сопрягает линейный оператор $\lambda_1 x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_1 < 1$, с линейным оператором $e^{-1}x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$;

2) гомеоморфизм $x_1 \to x_1|x_1|^{-\frac{1}{ln\ |\lambda_1|}-1}$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, сопрягает линейный оператор $\lambda_1 x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $-1 < \lambda_1 < 0$, с линейным оператором $-e^{-1}x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$;

3) гомеоморфизм $x_1 \to x_1|x_1|^{\frac{1}{ln\ \lambda_1}-1}$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, сопрягает линейный оператор $\lambda_1 x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 1$, с линейным оператором ex_1, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$;

4) гомеоморфизм $x_1 \to x_1|x_1|^{\frac{1}{ln\ |\lambda_1|}-1}$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, сопрягает линейный оператор $\lambda_1 x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < -1$, с линейным оператором $-ex_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$;

5) гомеоморфизм $(x_1, x_2) \to \left(x_1\ cos\left(\pi ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) - x_2\ sin\left(\pi ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),\right.$ $\left. x_1 sin\left(\pi ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) + x_2 cos\left(\pi ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2/(0,0)$, $(0,0) \to (0,0)$, сопрягает линейный оператор $-e^{-1}Ix$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, где I есть единичная матрица второго порядка, с линейным оператором $e^{-1}Ix$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$; а также линейный оператор $-eIx$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, с линейным оператором eIx, $\forall x \in \mathbb{R}^2$;

6) гомеоморфизм $(x_1, x_2) \to \left(\left\{ x_1 \cos\left(\dfrac{arctg\dfrac{\beta}{\alpha}}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \; ln\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right) - \right.\right.$

$\left.\left. - \; x_2 \sin\left(\dfrac{arctg\dfrac{\beta}{\alpha}}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \; ln\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right) \right\} \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right)^{-\frac{1}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - 1},\right.$

$\left\{ x_1 \sin\left(\dfrac{arctg\dfrac{\beta}{\alpha}}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \; ln\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right) + x_2 \cos\left(\dfrac{arctg\dfrac{\beta}{\alpha}}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \; ln\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right) \right\} \times$

$\left. \times \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right)^{-\frac{1}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - 1} \right)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2/(0,0)$, $(0,0) \to (0,0)$, сопрягает линейный оператор $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} < 1$, $\beta \neq 0$, с линейным оператором $e^{-1}Ix$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$;

7) гомеоморфизм $(x_1, x_2) \to \left(\left\{ x_1 \cos\left(\dfrac{arctg\dfrac{\beta}{\alpha}}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \; ln\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right) - \right.\right.$

$\left.\left. - \; x_2 \sin\left(\dfrac{arctg\dfrac{\beta}{\alpha}}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \; ln\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right) \right\} \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right)^{\frac{1}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - 1},\right.$

$\left\{ x_1 \sin\left(\dfrac{arctg\dfrac{\beta}{\alpha}}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \; ln\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right) + x_2 \cos\left(\dfrac{arctg\dfrac{\beta}{\alpha}}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \; ln\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right) \right\} \times$

$\left. \times \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} \right)^{\frac{1}{ln\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - 1} \right)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2/(0,0)$, $(0,0) \to (0,0)$, сопрягает линейный оператор $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > 1$, $\beta \neq 0$, с линейным оператором $e^{-1}Ix$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 2. *Системы* (1) *с преобразованиями голономии, определяемыми сильно гиперболическими матрицами, являются структурно устойчивыми.*

Доказательство. Обозначим через $\varphi(t; \tau, x, \mu)$ решение системы (3), удовлетворяющее начальному условию (τ, x), и, следуя [3, с. 62], введем отражающую функцию $R(t, x, \mu)$ этой системы в виде $R(t, x, \mu) = \varphi(-t; t, x, \mu)$. Согласно [3, с. 148–149] имеет место соотношение $R(t, x, \mu) = R(t, x, 0) + r(t, x, \mu)$, где $r(t, x, \mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Отсюда для отображения Пуанкаре (отображения за период) $S(x, \mu) = R(-1, x, \mu)$ системы (3) получаем представление $S(x, \mu) = S(x, 0) + s(x, \mu)$, где $s(x, \mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Теперь на основании этого представления и теоремы 1 приходим к утверждению теоремы 2.

Рассмотрим теперь уравнения Риккати

$$\frac{dx}{dt} = a_2(t)x^2 + a_1(t) + a_0(t) \qquad (4)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = b_2(t, \mu)x^2 + b_1(t, \mu)x + b_0(t, \mu), \qquad (5)$$

где функции $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_i : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$, являются гладкими по своим аргументам и 2–периодическими по первому аргументу, интервал $M \subset \mathbb{R}$, $b_i(t, 0) = a_i(t)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, 2}$, $0 \in M$, μ – малый параметр. Уравнения Риккати (4) и (5) определяют [2] накрывающие слоения F^0 и F^μ, соответственно, на многообразии $\overline{\mathbb{R}} \times S^1$, где $\overline{\mathbb{R}}$ есть вещественная прямая $\mathbb{R}$, дополненная бесконечно удаленной точкой ∞. Уравнение Риккати (4) будем называть **структурно устойчивым**, если топологически эквивалентны накрывающие слоения F^0 и F^μ при всех достаточно малых значениях $|\mu|$.

Рассмотрим вспомогательные линейные системы

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = a_1(t)u_1 + a_0(t)u_2, \\[2mm] \dfrac{du_2}{dt} = -a_2(t)u_1, \end{cases} \tag{6}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = b_1(t, \mu)u_1 + b_0(t, \mu)u_2, \\[2mm] \dfrac{du_2}{dt} = -b_2(t, \mu)u_1. \end{cases} \tag{7}$$

Так как преобразование $x = u_1 u_2^{-1}$ одновременно переводит систему (6) в уравнение Риккати (4), а систему (7) – в уравнение Риккати (5), то, используя представление для отображения Пуанкаре системы (7) из хода доказательства теоремы 2, на основании теорем 1 и 2 из [2] имеем такое утверждение.

Теорема 3. *Для того, чтобы уравнение Риккати* (4) *было структурно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы его матрица голономии* [2] *имела вещественные собственные значения и они не совпадали по модулю.*

На основании аналога (для многообразия $\overline{\mathbb{R}}$) утверждения из [3, с. 60] и теоремы приходим к следующему выводу.

Следствие. *Уравнение Риккати* (4) *структурно устойчиво тогда и только тогда, когда оно имеет ровно два 2–периодических решения и при этом у его матрицы голономии нет равных по модулю собственных значений.*

Abstract. Criterions of structural stability of the real linear systems and Riccati equations with periodic coefficients on the basis of V. I. Mironenko reflecting function are obtained.

Литература

1. В. Н. Горбузов, В. Ю. Тыщенко, Об эквивалентности слоений линейных дифференциальных систем, Дифференц. уравнения, **39**, № 12 (2003), 1596–1599.

2. В. Ю. Тыщенко, Эквивалентность уравнений Риккати с периодическими коэффициентами, Дифференц. уравнения, **39**, № 4 (2003), 565–567.

3. В. И. Мироненко, Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем, Гомель, Мин. образов. РБ, УО "ГГУ им. Ф. Скорины 2004.

4. В. Н. Горбузов, В. Ю. Тыщенко, О классификации накрывающих слоений. Дифференциальные уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru/journal), № 4 (2004), 1–19.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступило 21.11.05