Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.548

m-Полунормализаторы в n-арной группе

А. М. Гальмак

Нормализатор и полунормализатор подмножества в n-арной группе являются различными n-арными аналогами нормализатора подмножества в группе. Еще одним таким n-арным аналогом является понятие m-полунормализатора [1], который при $m = 2$ и $m = n$ совпадает с нормализатором и полунормализатором соответственно. Цель данной работы — изучение свойств m-полунормализаторов.

Все обозначения стандартны. В некоторых случаях для сокращения записей будем использовать обозначение

$$\overset{m}{B} = \begin{cases} \underbrace{B\ldots B}_{m}, & m \geq 1, \\ \varnothing, & m \leq 0. \end{cases}$$

Следуя Дернте [2], подмножество B n-арной группы $< A, [\ ] >$ будем называть: инвариантным в ней, если

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{i}x\underbrace{B\ldots B}_{n-1-i}] \qquad (1)$$

для любого $x \in A$ и всех $i = 1, \ldots, n-1$; полуинвариантным в $< A, [\ ] >$, если

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x] \qquad (2)$$

для любого $x \in A$.

Инвариантность и полуинвариантность можно объединить общим понятием m-полуинвариантности [3].

Определение 1. *Подмножество B n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$ называется m-полуинвариантным в ней, если*

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{i(m-1)}x\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{n-1-i(m-1)}] \qquad (3)$$

для любого $x \in A$ и всех $i = 1, \ldots, k$.

Если в (3) положить $m = 2$, то получим (1). Поэтому 2-полуинвариантность совпадает с инвариантностью. При $m = n$ (3) превращается в (2), что означает совпадение понятий n-полуинвариантности и полуинвариантности. При $i = k$ (3) снова превращается в (2), откуда следует полуинвариантность в n-арной группе m-полуинвариантных в ней подмножеств.

Лемма. *Пусть n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$, удовлетворяет следующему условию для некоторого $x \in A$:*

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-m}]. \qquad (4)$$

Тогда для всех $i = 1, \ldots, k-1$ верно (3).

Доказательство. Так как $n - m = (k-1)(m-1)$, то используя (4), а также равенство

$$[\underbrace{B\ldots B}_{n}] = B,$$

получим

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1} x \underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{(k-1)(m-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1} x [\underbrace{B\ldots B}_{n}] \underbrace{B\ldots B}_{n-m-1}] =$$

$$= [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]\underbrace{B\ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}[\underbrace{B\ldots B}_{m-1} x \underbrace{B\ldots B}_{n-m}]\underbrace{B\ldots B}_{n-m}] =$$

$$= [\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)} x \underbrace{B\ldots B}_{2n-2m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)} x [\underbrace{B\ldots B}_{n}]\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{n-2-2(m-1)}] =$$

$$= [\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)} x \underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{n-1-2(m-1)}] = \ldots = [\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{(k-2)(m-1)} x \underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}] =$$

$$= [\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{(k-2)(m-1)} x [\underbrace{B\ldots B}_{n}]\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)-1}] = [\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{(k-2)(m-1)}[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}] =$$

$$= [\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{(k-2)(m-1)}[\underbrace{B\ldots B}_{m-1} x \underbrace{B\ldots B}_{n-m}]\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}] =$$

$$= [\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{(k-1)(m-1)} x [\underbrace{B\ldots B}_{n}]\underbrace{B\ldots B}_{m-2}] = [\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{(k-1)(m-1)} x \underbrace{B\ldots B}_{m-1}].$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$, удовлетворяет условию (4) для некоторого $x \in A$ и пусть $s \geq 1$. Тогда*

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [x\underbrace{B\ldots B}_{s(n-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{i(m-1)} x \underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{s(n-1)-i(m-1)}]$$

для любого $i = 1, \ldots, sk-1$.

Следствие 2. *n-Арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$, m-полуинвариантна в $< A, [\ ] >$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию*

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1} x \underbrace{B\ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1} x].$$

для любого $x \in A$.

Отметим, что в [3], где впервые появились m-полуинвариантные n-арные подгруппы, для их определения использовались именно равенства из следствия 2.

Следствие 3 [4]. *n-Арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ является инвариантной в ней тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию*

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [Bx\underbrace{B\ldots B}_{n-2}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1} x].$$

В [3] показано, что для конечных n-арных подгрупп равенство (2) в следствиях 2 и 3 можно отбросить.

Теперь определим понятие m-полунормализатора подмножества в n-арной группе.

Определение 2. *m-Полунормализатором подмножества B в n-арной группе $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$ называется множество*

$$N_A(B,m) = \{x \in A | [x \overset{n-1}{B}] = [\overset{i(m-1)}{B} x \overset{n-1-i(m-1)}{B}], \forall i = 1, \ldots, k\}.$$

Для 2-полунормализатора $N_A(B,2)$ будем употреблять обозначение $N_A(B)$ и называть его нормализатором подмножества B в n-арной группе $< A, [\ ] >$. Таким образом,

$$N_A(B) = \{x \in A | [x \overset{n-1}{B}] = [\overset{i}{B} x \overset{n-1-i}{B}], \forall i = 1, \ldots, n-1\}.$$

n-Полунормализатор $N_A(B,n)$ будем обозначать через $HN_A(B)$ и называть полунормализатором [4]. Таким образом,

$$HN_A(B) = \{x \in A | [x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]\}.$$

Ясно, что подмножество B n-арной группы $< A, [\ ] >$ m-полуинвариантно в ней тогда и только тогда, когда

$$N_A(B,m) = A.$$

В частности, подмножество B n-арной группы $< A, [\ ] >$ инвариантно (полуинвариантно) в ней тогда и только тогда, когда

$$N_A(B) = A \ (HN_A(B) = A).$$

Ясно также, что для n-арной подгруппы $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ верно включение $B \subseteq N_A(B,m)$.

Из леммы вытекает

Следствие 4. *Если $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$, то*

$$N_A(B,m) = \{x \in A | [x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{m-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]\}.$$

В частности,

$$N_A(B) = \{x \in A | [x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [Bx \underbrace{B \ldots B}_{n-2}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]\}.$$

Отметим, что в [1], где впервые появились m-полунормализаторы n-арной подгруппы, они определялись также, как в следствии 4.

Теорема 1 [1]. *Если $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, $m-1$ делит $n-1$, то $< N_A(B,m), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$.*

Теорема 2 [1]. *Если $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, $m-1$ и $k-1$ делят $n-1$, $m-1$ делит $k-1$, то*

$$N_A(B,m) \subseteq N_A(B,k).$$

Следствие 5 [4]. *Для любой n-арной подгруппы $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$*

$$< N_A(B), [\ ] > \text{ и } < HN_A(B), [\ ] >$$

– n-арные подгруппы в $< A, [\ ] >$, причём $N_A(B) \subseteq HN_A(B)$.

Так как n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ m-полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда $N_A(B, m) = A$, то из торемы 2 вытекает

Следствие 6. *Если $< B, [\ ] >$ — n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, $m-1$ и $k-1$ делят $n-1$, $m-1$ делит $k-1$, то из m-полуинвариантности $< B, [\ ] >$ в $< A, [\ ] >$ вытекает k-полуинвариантность $< B, [\ ] >$ в $< A, [\ ] >$.*

Отметим, что следствие 6 вытекает непосредственно из леммы.

Теорема 3. *Пусть $< B, [\ ] >$ — n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, причем $m-1$ и $k-1$ делят $n-1$, $r-1$ — наибольший общий делитель чисел $m-1$ и $k-1$:*

$$r-1 = (m-1, k-1).$$

Тогда

$$N_A(B, r) = N_A(B, m) \cap N_A(B, k).$$

Доказательство. Включение

$$N_A(B, r) \subseteq N_A(B, m) \cap N_A(B, k) \tag{5}$$

следует из теоремы 2.

Так как $r-1 = (m-1, k-1)$, то существуют целые числа α и β такие, что

$$\alpha(m-1) + \beta(k-1) = r-1.$$

Пусть для определенности $\alpha > 0$, $\beta < 0$, т.е.

$$\alpha(m-1) = -\beta(k-1) + (r-1), \ -\beta(k-1) > 0.$$

Выберем целое t, удовлетворяющее неравенству

$$-\beta(k-1) < t(n-1). \tag{6}$$

После этого можно выбрать целое s, удовлетворяющее неравенству

$$t(n-1) + \beta(k-1) < s(n-1) - \alpha(m-1). \tag{7}$$

Из (6) следует

$$t(n-1) + \beta(k-1) > 0,$$

откуда и из (7) получаем

$$\alpha(m-1) < s(n-1). \tag{8}$$

Если теперь

$$x \in N_A(B, m) \cap N_A(B, k),$$

то, дважды применяя следствие 1 и учитывая (6) - (8), получим:

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [x\underbrace{B\ldots B}_{s(n-1)}] = [\underbrace{B\ldots B}_{\alpha(m-1)}x\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{s(n-1)-\alpha(m-1)}] =$$

$$= [\underbrace{B\ldots B}_{r-1}[\underbrace{B\ldots B}_{-\beta(k-1)}x\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{t(n-1)+\beta(k-1)}]\underbrace{B\qquad\ldots\qquad B}_{s(n-1)-\alpha(m-1)-\beta(k-1)-t(n-1)}] =$$

$$= [\underbrace{B\ldots B}_{r-1}[x\underbrace{B\ldots B}_{t(n-1)}]\underbrace{B\quad\ldots\quad B}_{s(n-1)-(r-1)-t(n-1)}] =$$

$$= [\underbrace{B \dots B}_{r-1} x \underbrace{B \quad \dots \quad B}_{s(n-1)-(r-1)}] = [\underbrace{B \dots B}_{r-1} x \underbrace{B \dots B}_{n-r}].$$

Применяя лемму и учитывая верное равенство

$$[x \underbrace{B \dots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \dots B}_{n-1} x],$$

получим $x \in N_A(B, r)$. Таким образом, доказано включение

$$N_A(B, m) \cap N_A(B, k) \subseteq N_A(B, r). \tag{9}$$

Из (5) и (9) следует требуемое равенство. Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть $< B, [\ ] >$ — n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$. Тогда:

1) если $m - 1$ делит $n - 1$, $r - 1 = (m - 1, n - 1)$, то

$$N_A(B, r) = N_A(B, m) \cap HN_A(B);$$

2) если $m - 1$ и $k - 1$ делят $n - 1$, $(m - 1, k - 1) = 1$, то

$$N_A(B) = N_A(B, m) \cap N_A(B, k);$$

3) если $m - 1$ делит $n - 1$, $(m - 1, n - 1) = 1$, то

$$N_A(B) = N_A(B, m) \cap HN_A(B).$$

Если в правой части равенства

$$N_A(B, r) = N_A(B, m) \cap N_A(B, k)$$

операцию $\cap$ заменить операцией $\vee$, т.е. рассмотреть n-арную подгруппу, порожденную m-полунормализатором $N_A(B, m)$ и k-полунормализатором $N_A(B, k)$, то будет ли эта n-арная подгруппа t-полунормализатором для некоторого t, и как связано число t с числами m и k?

Предложение. *Если $< B, [\ ] >$ — n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, $m - 1$ и $k - 1$ делят $n - 1$, то*

$$N_A(B, m) \vee N_A(B, k) \subseteq N_A(B, t),$$

где $t - 1$ — наименьшее общее кратное чисел $m - 1$ и $k - 1$:

$$t - 1 = [m - 1, k - 1].$$

Доказательство. Так как $m-1$ делит $n-1$, $k-1$ делит $n-1$, то $t-1 = [m-1, k-1]$ делит $n - 1$, т.е. можно рассматривать t-полунормализатор $N_A(B, t)$.

Так как $t - 1$ кратно $m - 1$ и $k - 1$, то по теореме 2

$$N_A(B, m) \subseteq N_A(B, t), N_A(B, k) \subseteq N_A(B, t),$$

откуда

$$N_A(B, m) \vee N_A(B, k) \subseteq N_A(B, t).$$

Предложение доказано.

Вопрос 1. *Верно ли, что*

$$N_A(B,m) \vee N_A(B,k) = N_A(B,t),$$

где $t-1=[m-1,k-1]$, *т.е. верно ли обращение предыдущего предложения?*

С предыдущим вопросом связан следующий

Вопрос 2. *Будет ли совокупность*

$$\{N_A(B,m) | m-1 \text{ делит } n-1\}$$

подрешеткой решетки всех n*-арных подгрупп* n*-арной группы* $< A, [\ ] >$*?*

Ясно, что при положительном ответе на вопрос 2, $N_A(B)$ и $HN_A(B)$ будут соответственно наименьшим и наибольшим элементами этой подрешетки.

Abstract. In this paper the m-normalizer in n-group are considered and studied.

Литература

1. А.М. Гальмак, *Конгруэнции полиадических групп*, Мінск, Беларуская навука. 1999.

2. W. Dorute, *Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff*, Math. Z., 1928, B.29. 1–19.

3. А.М.Гальмак, *Инвариантные подгруппы n-арных групп и их обобщения*, Вопросы алгебры, **№5**, 1990, 91–94.

4. С.А. Русаков, *Алгебраические n-арные системы*, Мінск. Навука і тэхніка. 1992.

Могилевский государственный
университет продовольствия

Поступило 12.04.06