УДК 621.373 : 535.01

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

В. С. Смирнов и *Б. Л. Желнов*

В задаче о взаимодействии электромагнитного поля с системой двухуровневых атомов выделяется малый параметр — отношение ширины атомного уровня к ширине линии люминесценции. Проводится разложение решения по этому параметру, что существенно расширяет область рассматриваемых энергий. Уравнение для функции распределения фотонов решается в представлении когерентных состояний. Найдены дисперсии числа фотонов и ширины линий излучения лазеров с резонаторами типа Фабри—Перо и кольцевым.

Теория газового лазера при малых энергиях излучения развита сравнительно хорошо (лэмбовское приближение). При больших энергиях излучения решение вне резонанса удается проанализировать только численными методами при одинаковых константах релаксации [1], и лишь в резонансе оно исследуется до конца аналитически [2]. В случае кольцевого лазера появляются дополнительные трудности, связанные с возможностью существования двух встречных волн с разными амплитудами и фазами. Однако при различных константах релаксации в задаче удается выделить малый параметр — отношение ширины атомного уровня γ_0 к ширине линии люминесценции γ (например, для He—Ne лазера $\gamma_0/\gamma \sim 10^{-1}$), который позволяет существенно расширить область рассматриваемых энергий поля E^2 вплоть до значений $(Ed)^2 \leqslant \gamma^2$ (d — дипольный момент перехода, $\hbar=1$). По этому поводу следует заметить, что решение, полученное в работе [3], справедливо именно в этих пределах, а не для значений $(Ed)^2 \ll \gamma_0 (ku)^2/\gamma$ (ku — допплеровская ширина), как это считают авторы.

Цель настоящей работы заключается в строго квантовом определении естественных флуктуаций излучения одномодового газового лазера в указанном выше интервале энергий. При этом основное внимание будет уделяться расчету флуктуаций в кольцевом лазере, поскольку он включает в себя, как частный случай, лазер с резонатором типа Фабри—Перо и лазер, работающий в режиме однонаправленного излучения.

Аналогичные вопросы в рамках полуклассических уравнений с источниками шумов рассматривались в работах [3–6], где решение задачи о флуктуациях разбивается на две части. В первой части на основании обычных уравнений движения для элементов атомной матрицы плотности ρ_{mn} выписывается система однородных уравнений для отклонений $\delta\rho_{mn}$ от равновесных значений $\bar{\rho}_{mn}$ ($\delta\rho_{mn}=\rho_{mn}-\bar{\rho}_{mn}$) и связанных с ними корреляционных функций $\langle\delta\rho_{m_1n_1}(t)\,\delta\rho_{m_2n_2}(t')\rangle$. Вторая, наиболее важная часть задачи связана с определением начальных условий для этих функций. В [5] они задаются феноменологически на основании некоторых физических соображений. В [3] делается попытка строгого обоснования вида начальных условий. Для этого вводится операторная матрица плотности $\rho_{mn}(r, v, t)=\psi_m^+(r, v, t)\,\psi_n(r, v, t)$, где ψ^+, ψ — бозовские операторы рождения и уничтожения атомов в состояниях m и n, движущихся по классическим траекториям. Далее рассматривается некоторая функция, отождествляемая со средним от произведения двух одночастичных матриц $\langle \hat{\rho}_{m_1 n_1}(r_1, v_1, t)\, \hat{\rho}_{m_2 n_2}(r_2, v_2, t)\rangle$, которая выражается через двухчастичную матрицу плотности. Последняя разбивается на произведение $\langle \hat{\rho}_{m_1 n_1} \times (r_1, v_1, t)\rangle \langle \hat{\rho}_{m_2 n_2}(r_2, v_2, t)\rangle$ плюс корреляционная функция, в которую, по-видимому, включается и произведение $\langle \hat{\rho}_{m_1 n_2}\rangle \langle \hat{\rho}_{m_2 n_1}\rangle$.

В работе [3] корреляционная функция отбрасывается на том основании, что время релаксации элементов матрицы плотности атома мало по сравнению с временем релаксации поля в резонаторе. Но и в противоположном случае, рассматриваемом в [6] (твердотельный лазер), корреляция также не учитывается. К сожалению, в работах [3–6] это противоречие остается не объясненным и количественных оценок для отброшенной корреляционной функции не приводится.

Однако очевидно, что двухчастичную матрицу плотности нельзя представить в виде несимметричного произведения $\langle \hat{\rho}_{m_1 n_1}\rangle \langle \hat{\rho}_{m_2 n_2}\rangle$, поскольку в чистом состоянии она точно разбивается на симметричную сумму двух произведений. Далее, нельзя считать обоснованным приравнивание классической корреляционной функции $\langle \delta\rho_{m_1 n_1}(t)\, \delta\rho_{m_2 n_2}(t')\rangle|_{t=t'}$ к среднему $\langle \hat{\rho}_{m_1 n_1}(t)\, \hat{\rho}_{m_2 n_2}(t)\rangle - \langle \hat{\rho}_{m_1 n_1}(t)\rangle \langle \hat{\rho}_{m_2 n_2}(t)\rangle$, поскольку нет операторного аналога функции $\sigma\rho_{mn}$, а именно, это равенство используется в качестве начальных условий для корреляционных функций.

В квантовом подходе к задаче нет тех трудностей, которые возникают при введении источников шумов в уравнения движения и связаны с определением корреляционных функций для элементов матрицы плотности атомов, поскольку последовательное определение последних эквивалентно решению квантовой задачи.

Следует отметить, что существенную роль в результате работ [3–6] играют «нулевые флуктуации» пассивного резонатора, для которых используется известная формула Каллена—Вельтона с мнимой частью диэлектрической проницаемости, определяемой добротностью резонатора (модель распределенных потерь). На самом деле резонатор не является пассивным и по этой причине нельзя разделять тепловые флуктуации резонатора и активной среды, совместный учет которых приводит к компенсации «нулевых флуктуаций».[1]

1. Используя, как обычно, представление когерентных состояний для поля и спиновую модель N двухуровневых атомов [6, 7], запишем уравнения движения для матрицы плотности атомов r_j и функции распределения фотонов двух встречных волн ρ, без учета обратной связи

$$\left.\begin{aligned} \frac{i\partial r_j}{\partial t} + i\hat{\gamma} r_j &= i\hat{\gamma} r_j^0 + [H_j, r_j] - \sum_{q=\pm k} [(\overset{*}{g}{}_q^j \sigma_-^j - \langle \overset{*}{g}{}_q^j \sigma_-^j r_j\rangle)\, r_j \nabla_q \ln \rho - \text{э. с.}], \\ H_j &= \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\, \sigma_3^j + \sum_{q=\pm k} (\overset{*}{z}_q \overset{*}{g}{}_q^j \sigma_-^j + \text{э. с.}); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=\pm k} [\nabla_q (\langle \overset{*}{g}{}_q^j \sigma'_- r_j\rangle - i\nu z_q)\, \rho - \text{к. с.}], \tag{2}$$

где σ_j — спиновые матрицы [6], ω — частота резонантора, ω_0 — частота атомного перехода, z_q — собственное значение оператора уничтожения фотона с импульсом $q = \pm k$ $(k = \omega/c)$, $g_q^j = d\sqrt{2\pi\omega_0/V} \exp[iq(R_j + v_j t)]$ — константа взаимодействия плоской волны с j-ым атомом в точке $R_j + V_j t$ (v_j — скорость, V — объем системы); $\nabla_q = \partial/\partial z_q$. Релаксация спиновой системы учитывается членом с $\hat{\gamma}$ в уравнении (1), сохраняющим нормировку r_j, r_j^0 — матрица плотности атома в отсутствие взаимодействия с полем: $r_j^0 = (I_j \pm \sigma_3^j)/2$ для возбужденных и невозбужденных атомов соответственно. При выводе уравнений (1), (2) предполагалось, что ширина линии резо-

[1] Данный вопрос разбирается в работе Берштейна [12].

натора ν мала по сравнению с константами релаксации атомов γ_0 и γ (мала поправка, связанная с коллективными эффектами в спонтанном излучении [6]). Символ $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по всем переменным j-го атома.

Все дальнейшие исследования будут вестись при не слишком малых энергиях излучения $(Ed)^2 > \gamma_0 \gamma^3/(ku)^2$, тем самым исключается область неустойчивости двухволнового режима генерации, статистика которого рассмотрена достаточно подробно в [8]. Это условие приводит к необходимости учета пространственной модуляции, среды, обусловливающей устойчивость генерации стоячей волны вблизи резонанса [9-11].

2. Для того чтобы получить уравнение для фотонной функции распределения ρ, необходимо найти среднее значение макроскопической поляризации $P_q = \sum\limits_j \langle \overset{*}{g}{}^j_q \sigma^j_- r_j \rangle$ с учетом квантовых поправок. Из уравнения (1) легко получить формальное решение

$$\left.\begin{aligned} P_q = i\nu\eta \Big\langle \varepsilon \overset{*}{f}_q L^{-1} \tilde{z}\, [L_0 + \beta\varepsilon \operatorname{Re} (\overset{*}{\tilde{z}} L^{-1} \tilde{z})]^{-1} \Big[1 + \frac{\beta}{2} \frac{N}{\Delta N} \operatorname{Re} \Big(\overset{*}{\tilde{z}} L^{-1} \sum_{q'} f_{q'} \overset{*}{\nabla}_{q'} \ln \rho \Big) \Big] - \\ - \frac{1}{2} \frac{N}{\Delta N} \overset{*}{f}_q L^{-1} \sum_{q'} f_{q'} \overset{*}{\nabla}_{q'} \ln \rho \Big\rangle, \\ \tilde{z} = \sum_q f_q \Big(z_q - \frac{1}{2} \overset{*}{\nabla}_q \ln \rho \Big). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

В этом выражении введены операторы $L = 1 + i\delta + \frac{\partial}{\partial\tau}$, $L_0 = \varepsilon + \frac{\partial}{\partial\tau}$, где $\delta = \gamma t$, $\sigma = (\omega_0 - \omega)/\gamma$ — безразмерное время и расстройка и $\varepsilon = \gamma_0/\gamma$ — малый параметр задачи [10, 11].[2] Остальные обозначения имеют следующий смысл: ΔN — разность между числом возбужденных и невозбужденных атомов, $\eta = \sqrt{\pi}\, |q|^2 \Delta N / \nu k u$ — параметр генерации, определяющий превышение подкачки над пороговым значением ($\eta \geqslant 1$), $\beta = 4\, |q|^2/\gamma\gamma_0$ — параметр насыщения, $f_q = \exp\, [i\, (qR + q/k\Omega\, \tau)]$. Символ $\langle \ldots \rangle$ в (3) теперь обозначает усреднение по длине резонатора и по безразмерной скорости $\Omega = kv/\gamma$.

Пространственную модуляцию среды при вычислении средних будем учитывать в первом приближении по ε и только в тех членах, где эта поправка приводит к существенным эффектам. Как будет показано ниже, эти эффекты проявляются только в том, что флуктуации числа фотонов n_q во встречных волнах в центре линии ($\delta = 0$) остаются малыми $\overline{(\Delta n_q)^2} \sim \bar{n}_q$, в то время как без учета модуляции при $\delta = 0$ флуктуации велики: $\overline{(\Delta n_q)^2} \sim \bar{n}_q^2$ [8], последнему в классической теории соответствует положение безразличного равновесия. На средние значения интенсивностей встречных волн [1] на флуктуации полной энергии и на ширины линий излучения пространственная модуляция среды не оказывает существенного влияния и при вычислении этих характеристик учитываться не будет. Средние значения интенсивностей встречных волн и полной энергии излучения $E^2 V = 2\pi \bar{n}\, \omega$ в режиме генерации стоячей волны находятся из стационарных уравнений

$$\operatorname{Im} P_q^0 = \nu \sqrt{\bar{n}_q}, \quad \bar{n}_+ = \bar{n}_- = \frac{\bar{n}}{2}, \tag{4}$$

где P_q^0 — классическая часть поляризации, которая получается из (3) при отбрасывании квантовых поправок $\nabla_q \ln \rho$. Это состояние, как будет видно дальше, соответствует максимуму функции распределения и, следовательно, классически устойчиво. Предполагая, как обычно, что допплеровская ширина велика по сравнению со всеми характерными частотами

---

[2] Подобный же параметр использован в работе Бакланова и Чеботаева [13], где рассматривалась задача о поглощении плоской волны произвольной интенсивности в газе.

задачи, из (3), (4) легко получить уравнение для определения полного числа фотонов

$$\left.\begin{aligned} &\beta\bar{n} = (1+\delta^2)(y^2-1), \\ &y\sqrt{1+\delta^2-\frac{4\delta^2}{(1+y)^2}} = \eta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Уравнение (5) можно решить приближенно при произвольных η и δ с хорошей точностью

$$\beta\bar{n} = \frac{1}{2}\left[\eta^2 - 3 - \delta^2 + \sqrt{(\eta^2-3-\delta^2)^2 + 8(\eta^2-1)(1+\delta^2)}\right]. \tag{6}$$

Относительная погрешность этого решения, максимальная при $\eta^2 \sim \sim \delta^2 \gg 1$, не превышает пяти процентов. Полученная зависимость энергии излучения от расстройки имеет минимум в резонансе ($\beta\bar{n} = \eta^2 - 1$) и выходит на насыщение вдали от резонанса ($\delta^2 \gg \eta^2$, $\beta\bar{n} = 2\eta^2 - 2$); при этом ширина провала зависит от энергии подкачки и равна $(6\eta^2+2)^{1/2}$. Для малых энергий излучения ($\eta - 1 \ll 1$) из решения (6) следует обычное приближение лэмбовской теории.

Дальнейшее увеличение подкачки обусловливает наряду с ростом плотности возбуждений в среде возрастание доли атомов, участвующих в излучении, это приводит к квадратичной зависимости энергии излучения от подкачки. Линейная зависимость $\beta\bar{n}$ от η [11] снова возникает при таких энергиях, когда усиление становится однородным по всему контуру (все атомы принимают участие в излучении). Однако этот предельный случай в данной работе не рассматривается.

3. Для дальнейшего исследования удобно ввести переменные

$$z_{\pm k} = \sqrt{\frac{n \pm Q}{2}} \exp\left[\frac{i}{2}(\psi \pm \varphi)\right],$$

где $Q = n_+ - n_-$ — разность чисел фотонов во встречных волнах, а ψ и φ — соответственно сумма и разность их фаз. В стационарном состоянии ($n = \bar{n}$) $\bar{Q} = 0$. Квантовые поправки $(n - \bar{n}) \ll \bar{n}$, $Q \neq 0$, связанные с флуктуациями излучения, будем учитывать, разлагая P_q^0 вблизи этого состояния и удерживая в первом приближении члены с $\nabla_q \ln\rho$ в выражении (3). В результате уравнение для функции распределения фотонов примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\nu}\frac{\partial\rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial n} n\rho\left\{(n-\bar{n})\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\bar{n}} + \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{N}{\Delta N}\right) - \frac{2\bar{n}}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\bar{n}}\right]\frac{\partial\ln\rho}{\partial n}\right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial Q} n\rho\left\{\frac{Q}{\bar{n}}\eta\Delta\chi + \frac{1}{2}\left[\left(1+y\frac{N}{\Delta N}\right) - 2\eta\Delta\chi\right]\frac{\partial\ln\rho}{\partial Q}\right\} - \delta\left(\frac{y-1}{y+1}\right)\frac{\partial\rho}{\partial\psi} + \\ &+ \frac{1}{2\bar{n}}\left\{1+\frac{N}{\Delta N}\left[y(1+\delta^2)-\delta^2\right]\right\}\frac{\partial^2\rho}{\partial\psi^2} + \frac{1}{2\bar{n}}\left\{1+\frac{N}{\Delta N}y\left[y(1+\delta^2)-\delta^2\right]\right\}\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Подчеркнем, что в данном уравнении отброшены квантовые поправки более высокого порядка по сравнению с $(n - \bar{n})/\bar{n}$ и $Q/\bar{n}$. Эффекты пространственной модуляции оставлены только в той части уравнения, которая связана с флуктуациями фотонов по направлениям. Они содержатся в функции $\Delta\chi$, представляющей собой разность насыщенных коэффициентов усиления встречных волн,

$$\begin{aligned} \Delta\chi = \frac{4\delta^2 y^2(y-1)}{\eta^3(1+y)^2} + \langle N^2\rangle,\ \langle N_2\rangle = 2\varepsilon\Bigg\langle\sum_q \mathrm{Re}\,(\overset{*}{f}_q L^{-1} f_{-q}) \times \\ \times\left[L_0 + \varepsilon\beta\bar{n}\sum_{q,q'}\mathrm{Re}\,(\overset{*}{f}_q L^{-1} f_{q'})\right]^{-1}\Bigg\rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

Второй член этого выражения полностью обусловлен пространственной модуляцией среды и определяется амплитудой второй гармоники перенаселенности. Очевидно, что в области малых расстроек он может стать основным фактором, определяющим величину флуктуаций фотонов по направлениям, а при больших расстройках им можно пренебречь. Для того чтобы выяснить основные особенности $\langle N_2 \rangle$ как функции параметра ε и энергии излучения, исследуем $\langle N_2 \rangle$ при $\delta=0$. Обобщение на нерезонансный случай проводится тривиально.

$$\langle N_2 \rangle = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega \operatorname{Re} a_1 (1 - i\Omega)}{1 + \Omega^2 + \beta\bar{n} + \beta\bar{n} \operatorname{Re} a_1 (1 - i\Omega)}, \tag{9}$$

где $a_1(\Omega)$ — цепная дробь, определяемая рекурентными соотношениями [1]

$$a_e + \frac{1}{2} \varepsilon\beta\bar{n} \left(c_e^- + c_e^+ a_e a_{e+1}\right) = 0, \quad e \geqslant 1;$$

$$c_e^{\pm} = \left\{(\varepsilon + 2ie\Omega)\,[1 + i\,(2e \pm 1)\,\Omega] + \frac{\varepsilon}{2}\beta\bar{n}\left[1 + \frac{1 + i\,(2e \pm 1)\,\Omega}{1 + i\,(2e \mp 1)\,\Omega}\right]\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Основной вклад в интеграл (9) дают две области скоростей $|\Omega| \gg 1$ и $|\Omega| \lessdot \varepsilon$. С точностью до первого порядка по ε в области $|\Omega| \gg 1$ $a_1 \simeq -\frac{\varepsilon}{2}\beta\bar{n}/2i\Omega\,(1 - i\Omega)$; причем здесь наложено ограничение на энергию излучения, указанное в начале статьи. В области малых скоростей $|\Omega| \lessdot \varepsilon$ с той же точностью по ε

$$a_1 = i\,\frac{I_{1 - \frac{i\varepsilon}{2\Omega}(1+\beta\bar{n})}\left(\frac{\varepsilon\beta\bar{n}}{2\Omega}\right)}{I_{-\frac{i\varepsilon}{2\Omega}(1+\beta\bar{n})}\left(\frac{\varepsilon\beta\bar{n}}{2\Omega}\right)}.$$

Проводя интегрирование в (9) по этим областям, после несложных преобразований получаем

$$\langle N_2 \rangle = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \beta\bar{n}}}\right) - \frac{\varepsilon\beta\bar{n}}{(1 + \beta\bar{n})}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x}\,\frac{\sin 2x}{1 + \sqrt{1 - \left[\frac{\beta\bar{n}\sin x}{x\,(1 + \beta\bar{n})}\right]^2}}, \tag{11}$$

здесь интеграл соответствует области малых скоростей и учитывает вклад остальных гармоник в амплитуду второй. Однако его зависимость от энергии весьма слабая и не влияет на качественное рассмотрение. Поэтому в интеграле (11) достаточно ограничится только второй гармоникой. Можно показать, что это утверждение остается справедливым и при ненулевых расстройках.

Проведенный анализ показывает, что при вычислении $\langle N_2 \rangle$ можно всегда пренебречь влиянием высших гармоник и тем самым значительно упростить расчеты. Приведем окончательное выражение для разности коэффициентов усиления (8) при $\delta \neq 0$

$$\Delta\chi = 4\,\frac{\delta^2 y^2\,(y - 1)}{\eta^3\,(1 + y)^2} + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{(\eta - 1)^2}{\eta^2\,(1 + \delta^2)}. \tag{12}$$

4. Решение уравнения (7) будем искать в виде $\rho = \rho_0(n, Q)\,\rho_1(\psi, \varphi, t)$, где ρ_0 — стационарная функция распределения, а ρ_1 — угловая часть, определяющая частоты и ширины линий излучения. Такое разбиение возможно, поскольку время установления распределения ρ_0 мало по сравнению с временем сбоя фаз, причем для входящих в ρ_1 величин n и Q надо брать их стационарные значения [7]. В результате этого уравнения для ρ_0 и ρ_1 можно расцепить и получить их решения. Рассмотрим сначала решение для стационарной функции распределения, которое, как следует из (7), имеет вид

$$\rho_0 = \text{const}\exp\left[-\frac{1}{2\bar{n}}\left(\frac{(n - \bar{n})^2}{d_n} + \frac{Q^2}{d_Q}\right)\right]. \tag{13}$$

Коэффициенты диффузии d_n и d_Q в решении (13) определяют дисперсию полного числа фотонов и среднеквадратичную разность между числом фотонов во встречных волнах

$$\frac{\overline{(\Delta n)^2}}{\bar{n}} = d_n + 1, \quad \frac{\overline{(n_+ - n_-)^2}}{\bar{n}} = d_Q + 1; \tag{14}$$

$$d_n = \frac{\eta}{2\bar{n}}\left(1 + \frac{N}{\Delta N}\right)\frac{\partial \bar{n}}{\partial \eta} - 1, \tag{16}$$

$$d_Q = \frac{2\eta^2 (1+y)^2 (1+\delta^2)\left(1 + y\frac{N}{\Delta N}\right)}{8\delta^2 y^2 (y-1)(1+\delta^2) + \varepsilon(\eta - 1)^2 \eta (1+y)^2} - 1. \tag{16}$$

Среднеквадратичная разность из (14) связана с дисперсией фотонов в каждом из направлений соотношением

$$4\overline{(\Delta n_\pm)^2} = \overline{(n_+ - n_-)^2} + \overline{(\Delta n)^2}.$$

При малых энергиях и конечных расстройках из формул (14)$\div$(16) следуют результаты, полученные в работе [8]. Рассмотрим некоторые предельные случаи.

А. В точном резонансе ($\delta = 0$)

$$\frac{\overline{(\Delta n)^2}}{\bar{n}} = \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}\left(1 + \frac{N}{\Delta N}\right), \tag{17}$$

$$\frac{2\overline{(\Delta n_\pm)^2}}{\bar{n}} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\eta}{(\eta - 1)^2}\left(1 + \eta\frac{N}{\Delta N}\right). \tag{18}$$

В (18) отброшена поправка, связанная с дисперсией полной энергии, поскольку параметр $1/\varepsilon$ считается большим. В отличие от [8] конечность $\overline{(\Delta n_\pm)^2}$ в точном резонансе есть следствие учета пространственной модуляции среды. С ростом энергии относительные флуктуации, определенные соотношениями (17), (18), стремятся к постоянному пределу. Особенностью полученного результата является то, что относительные флуктуации полного числа фотонов (17) при $\eta \gg 1$ и $\Delta N = N$ стремятся к двум, а не к единице, как в случае однородного уширения [7]. Причиной этого является неоднородно уширенная линия усиления (квадратичная зависимость $\bar{n} \sim \sim \eta^2$).

Б. Насыщение энергии излучения при больших расстройках ($\delta^2 \gg \eta^2$)

$$\frac{\overline{(\Delta n)^2}}{\bar{n}} = 2\frac{\overline{(\Delta n_\pm)^2}}{\bar{n}} = \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}\left(1 + \frac{N}{\Delta N}\right). \tag{19}$$

Дисперсия энергии встречных волн с увеличением расстройки монотонно уменьшается и стремится к пределу, определяемому флуктуациями полной энергии, что объясняется малостью взаимодействия между волнами разных направлений. Дисперсия полной энергии, как функция расстройки имеет минимум вблизи полуширины провала. Однако глубина минимума в общем случае мала и только при $\delta^2 \sim \eta^2 \gg 1$ достигает максимального значения порядка 20% от величины (17), (19).

В. Большие энергии излучения $\eta \gg 1$. В зависимости от расстройки дисперсия ведет себя следующим образом. В области $\delta^2 \ll \eta^2$ флуктуации по направлениям всегда велики по сравнению с флуктуациями полной энергии

$$\frac{\overline{(\Delta n)^2}}{\bar{n}} = \left(1 + \frac{N}{\Delta N}\right), \tag{20}$$

$$\frac{2\overline{(\Delta n_1)^2}}{\bar{n}} = \frac{N}{\Delta N}\eta^2 \frac{\sqrt{1+\delta^2}}{8\delta^2\sqrt{1+\delta^2} + \varepsilon\eta^2}. \tag{21}$$

С увеличением расстройки флуктуации во встречных волнах уменьшаются и при $\delta^2 \sim \eta^2$ слабо зависят от δ^2, мало отличаясь от значения на полуширине провала $(\delta^2=3\eta^2/_2)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\overline{2(\Delta n_\pm)^2}}{\bar n} &= \frac{(1+\sqrt{2})^3}{24}\left(1+\sqrt{2}\,\frac{N}{\Delta N}\right)+\frac{\overline{(\Delta n)^3}}{2\bar n}, \\ \frac{\overline{(\Delta n)^2}}{\bar n} &= \frac{6}{7}\left(1+\frac{N}{\Delta N}\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Величина дисперсии полной энергии практически не отличается от минимума, упомянутого выше.

Исходя из полученных результатов, нетрудно получить значение коэффициента корреляции встречных волн $K_0=(d_n-d_a)/(d_q+d_a+2)$, определенного, например, в работах [5, 8]. В области расстроек $\delta^2 \leqslant \eta^2$ $K_0 \simeq -1$, а при $\delta^2 \geqslant \eta^2$ K_0 стремится к нулю $(K_0=-(\eta^2+1)/2\,\delta^2)$.

Следует отметить, что все полученные результаты, касающиеся полной энергии излучения, описывают ситуацию, реализующуюся в лазере с резонатором типа Фабри—Перо. Если в формулах для полной энергии и ее дисперсии положить $\delta=0$, то получим результаты, относящиеся к лазеру, работающему в режиме однонаправленного излучения.

Кратко остановимся на сравнении с результатами работы [4], в которой используются полуклассические уравнения движения с источниками шумов. Если в наших формулах для флуктуаций интенсивностей встречных волн пренебречь пространственной модуляцией среды, что справедливо вне резонанса (см. (16)), то с точностью до численного коэффициента получаются соответствующие выражения работы [4]. Аналогично совпадают результаты и для полной энергии излучения. Однако это совпадение носит несколько формальный характер, поскольку физический смысл членов, входящих в формулы для флуктуаций, и их «происхождение» в данной работе и в [4] различны. Так как это различие касается только квантовых поправок, то оно связано со смыслом коэффициентов при вторых производных в уравнении (7), которые эквивалентны интенсивностям шумов [4]. Например, в коэффициенте при $\partial^2\rho/\partial n^2$ выражение $^1/_2\,(1+N/\Delta N)$ соответствует тому, что флуктуации поляризации, как следует из (1), определяются числом возбужденных атомов. В то время как в [4] «происхождение» слагаемого 1/2 обусловлено нулевыми флуктуациями пассивного резонатора, а слагаемого $N/2\Delta N$ — выбором начальных условий для корреляционных функций. Это касается всех подобных выражений в остальных коэффициентах. В интенсивностях шумов, определенных в [3, 4], не учитываются члены $(\bar n/\eta)(\partial\eta/\partial\bar n)$ и $\Delta\chi\eta$. Однако при вычислении дисперсий в [4] среднее от классического поля $\langle E^4\rangle$ отождествляется со средним от квадрата числа фотонов, что в итоге позволяет получить правильный результат. Действительно, как видно из определения (14) и формул (15), (16), эти ошибки взаимно компенсируются.

4. Перейдем к вычислению ширины линии излучения. В модели, учитывающей пространственную модуляцию среды, энергии встречных волн определены с малой дисперсией во всей области расстроек. По этой причине ширина линии будет определятся только флуктуациями фаз и не будет зависеть от флуктуаций амплитуд [7] в отличие от модели, учитывающей обратную связь [8].

Находя ρ_1 из нестационарного уравнения (7), получим выражение для ширины линии $\Delta\nu_\pm$ каждой из встречных волн (см., например, [7, 8])

$$\Delta\nu_\pm = \frac{\nu}{2\bar n}\left\{1+\frac{N}{\Delta N}\,\frac{(y+1)}{2}\,[y+(y-1)\,\delta^2]\right\}. \tag{23}$$

При малых энергиях $(\eta-1 \ll 1)$ ширина линии в два раза больше, чем ширина, найденная в [8], поскольку введенная там связь между встречными волнами закрепляет разность фаз. С ростом энергии подкачки $\Delta\nu_\pm$ стремится к постоянному пределу. Этот результат существенно изменится, если учесть обратную связь. Вне области синхронизации частот ширины линий встречных волн будут совпадать с шириной линии излучения генератора с резонатором типа Фабри—Перо

$$\Delta\nu_{\text{ст.}} = \frac{\nu}{4\bar{n}}\left\{1 + \frac{N}{\Delta N}\left[y + (y-1)\,\delta^2\right]\right\} \tag{24}$$

и убывают с ростом подкачки как $1/\eta$.

В случае одной бегущей волны ширина $\Delta\nu_{б}$ не зависит от расстройки, поведение ее как функции η мало отличается от $\Delta\nu_{\pm}$

$$\Delta\nu_{б} = \frac{\nu}{4\bar{n}}\left(1 + \eta^2\,\frac{N}{\Delta N}\right). \tag{25}$$

Коэффициент при первой производной $\partial\rho/\partial\varphi$ в (7) определяет сдвиг частоты излучения $\Delta\omega$, описывающий обычный эффект энергетического отталкивания.

$$\Delta\omega = (\omega_0 - \omega)\,\frac{\nu}{\gamma}\,\frac{y-1}{y+1}. \tag{26}$$

При малых энергиях эффект пропорционален $\beta\bar{n}$. С ростом энергии $\Delta\omega \to \nu\delta$.

Сравним полученные выражения для ширин с соответствующими результатами работ [4, 5]. При малых энергиях сравнение провести невозможно, поскольку результаты в [4, 5] противоречивы. В работе [5] для $\Delta\nu_{\pm}$ приводится выражение, которое при $\beta\bar{n} \gg (\gamma/ku)^2$ остается конечным во всей области расстроек, в то время как в [4] $\Delta\nu_{\pm} \to \infty$ при $\delta \to 0$. Для больших энергий в [4] делается заключение о насыщении ширины линии с ростом подкачки, что противоречит приведенной там же формуле, из которой видно, что $\Delta\nu_{\pm}$ прямопропорциональна подкачке. Кроме того, в работе [4] $\Delta\nu_{\pm} \to \infty$ при $\delta \to 0$ и $\eta \gg 1$. Однако, как следует из (23), ширина остается конечной и в резонансе

$$\Delta\nu_{\pm} = \frac{\nu\beta}{4}\,\frac{\eta^2 + \eta + 2}{\eta^2 - 1}\,(N = \Delta N). \tag{27}$$

Это различие связано с тем, что в [4] учитывается влияние амплитудных флуктуаций на ширину линии. Однако их учет проведен неверно, поскольку из приведенных там же уравнений для отклонений фаз от равновесных значений видно, что при $\delta = 0$ они вообще не зависят от амплитуд.

Случай стоячей и одной бегущей волны рассмотрен в [5]. При больших энергиях $\Delta\nu_{б}$ насыщается как в нашем рассмотрении, так и в [5]. Различие состоит только в численном коэффициенте. Для стоячей волны ширина линии (24) с ростом энергии убывает как $1/\eta$. В работе же [5] $\Delta\nu_{б}$ и $\Delta\nu_{\text{ст.}}$ различаются только численными коэффициентами при $\eta \gg 1$ и не зависят от энергии. Такая ситуация, как видно из (5), (24), реализуется только при $\delta^2 \gg \eta^2 \gg 1$, где $\Delta\nu_{\text{ст.}} = \frac{1}{2}\Delta\nu_{б}$.

Литература

[1] B. J. F e l d m a n, M. S. F e l d. Phys. Rev., *A1*, 1375, 1970.
[2] С. Г. Р а у т и а н. Нелинейная оптика. Тр. ФИАН, *43*, 1968.
[3] Ю. Г. К л и м о н т о в и ч, П. С. Л а н д а. ЖЭТФ, *58*, 1367, 1970.
[4] П. С. Л а н д а. ЖЭТФ, *58*, 1651, 1970.
[5] Ю. Л. К л и м о н т о в и ч, П. С. Л а н д а. ЖЭТФ, *56*, 275, 1969.
[6] Ю. Л. К л и м о н т о в и ч, А. С. К о в а л е в. ЖЭТФ, *59*, 464, 1970.
[7] А. П. К а з а н ц е в, Г. И. С у р д у т о в и ч. ЖЭТФ, *56*, 2001, 1969.
[8] В. С. С м и р н о в, Б. Л. Ж е л н о в. ЖЭТФ, *57*, 2034, 1969.
[9] Ю. Л. К л и м о н т о в и ч, П. С. Л а н д а, Е. Г. Л а р и о н ц е в. ЖЭТФ, *52*, 1916, 1967.
[10] С. Г. З е й г е р, Э. Е. Ф р а д к и н, П. П. Ф и л а т о в. Опт. и спектр., *26*, 622, 1969.
[11] Б. Л. Ж е л н о в, В. С. С м и р н о в, А. П. Ф а д е е в. Опт. и спектр., *28*, 744, 1970.
[12] И. Л. Б е р ш т е й н. Изв. вузов, радиофизика, *14*, 252, 1971.
[13] Е. В. Б а к л а н о в, В. П. Ч е б о т а е в. ЖЭТФ, *60*, 552, 1971.

Поступило в Редакцию 7 июня 1971 г.