Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.572

H-Профраттиниевы подалгебры конечных мультиколец

С. П. Новиков

Свойство покрытия-изолирования главных факторов, а также связь с другими формационными подалгебрами предопредилили интерес исследователей к изучению профраттининевых подгрупп Гашюца [1], их многочисленных аналогов и обобщений. Одно из таких обобщений и рассматривается в настоящей работе.

Используются обозначения и определения из [2]. Мультикольцо А считается конечным и разрешимым, Н — некоторая фиксированная подалгебра в А.

Определение 1. Пусть U — подалгебра мультикольца А. Тогда $[U, A]$ обозначает интервал между U и A в решетке подалгебр мультикольца A, т.е. множество таких подалгебр В мультикольца А, что $U \subseteq B \subseteq A$. Интервал $[U, A]$ назовем дополняемым, если для любой подалгебры $B \in [U, A]$ найдется подалгебра $C \in [U, A]$ такая.что $B \cap C = U$ и $< B, C >= A$.

Определение 2. Обозначим $\Sigma_{H,A} = \{U \in [H, A] | [U, A]$ дополняем$\}$; Σ_{min} — множество минимальных элементов в $\Sigma = \Sigma_{H,A}$; $[H, A]_{max}$ — множество максимальных элементов в $[H, A]$, т.е. множество максимальных подалгебр в А, содержащих Н.

Лемма 1. Если $U \in \Sigma, U \neq A$, то $U = \cap M$, где $M \in [U, A]_{max}$.

Доказательство. Пусть В $= \cap M$, где $M \in [U, A]_{max}$. Так как $U \in \Sigma$, то $[U, A]$ дополняем. Поэтому В имеет дополнение С, т.е. $< B, C >= A, B \cap C = U$. Если $C \neq A$, то $C \subseteq M \in [U, A]_{max}$. Тогда $< B, C > \subseteq M$, что противоречит условию $< B, C >= A$. Значит, С = А и $U = B \cap C = B \cap A = B$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если N — идеал в А и $U \in \Sigma$, то $U + N \in \Sigma$.

Доказательство. Пусть $B \in [U+N, A] \subseteq [U, A]$. Так как $U \in \Sigma$, то найдется такая подалгебра $C_1 \in [U, A]$, что $C_1 \cap B = U$ и $< C_1, B >= A$. Обозначим $C = C_1 + N$. Тогда $< C, B >= A$. Кроме того, так как $N \subseteq B$, то $B \cap C = B \cap (C_1 + N) = (B \cap C_1) + N = U + N$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть N — минимальный идеал в А и М — дополнение N в А, содержащее Н. Тогда $\Sigma_{H,M} = \{U \in \Sigma | U \subseteq M\}$. В частности, $(\Sigma_{H,M})_{min} = \{U \in \Sigma_{min} | U \subseteq M\}$.

Доказательство. Пусть $U \in \Sigma$ и $U \subseteq M$. По лемме 2 $U + N \in \Sigma$. Так как $A/N = M+N/N \simeq M/M \cap N = M/\{0\}, U+N/N \simeq U/U \cap N = U/\{0\}$, то интервал $[U, M]$ изоморфен интервалу $[U + N, A]$. Поэтому он дополняем. Следовательно, $U \in \Sigma_{H,M}$.

Пусть теперь $U \in \Sigma_{H,M}$. Тогда интервал $[U, M]$ дополняем. Возьмем $B \in [U, A]$. $B \cap M$ имеет дополнение C_1 в $[U, M]$. Значит, $C_1 \cap B = C_1 \cap M \cap B = U$. Рассмотрим следующие два случая:

1) $B \not\subseteq M$. Тогда М — собственная подалгебра в $< B, C_1 >$. Так как М — дополнение к минимальному идеалу разрешимого мультикольца, то М — максимальная в А подалгебра. Следовательно, $< B, C_1 >= A$ и C_1 — дополнение к В в $[U, A]$.

2) $B \subseteq M$. Обозначим $C = C_1 + N$. Тогда $< C, B >=< C_1 + N, B >=<< C_1, B >, N >=< M, N >= A$. Кроме того, $C \cap B = (C_1 + N) \cap B = C_1 \cap B = U$. Таким образом, С — дополнение к В в $[U, A]$.

В обоих случаях $U \in \Sigma$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть N — минимальный идеал в А и $D \in \Sigma_{min}$, причем $N \not\subseteq D$. Тогда существует $M \in [D, A]_{max}$ такая, что $N \not\subseteq M$.

Доказательство. По лемме 1 $D = \cap M$, где $M \in [D, A]_{max}$. Так как $N \not\subseteq D$, то найдется такая $M \in [D, A]_{max}$, что $N \not\subseteq M$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть N — минимальный идеал в A. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $N \not\subseteq D$ для некоторой $D \in \Sigma_{min}$;

2) $N \not\subseteq M$ для некоторой $M \in [H, A]_{max}$;

3) для любой подалгебры $D \in \Sigma_{min}$ найдется дополнение N в A, содержащее D.

Доказательство. Из 3) очевидно вытекает 1). Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из леммы 4. Остается показать, что 2) влечет 3). Так как N — минимальный идеал в A, то $N + M = A$, $N \cap M = \{0\}$. Пусть $D \in \Sigma_{min}$. Если $N \subseteq D$, то, так как $D/N = (D \cap M) + N/N \simeq D \cap M/\{0\}$, решетка $[D, A]$ изоморфна решетке $[D \cap M, M]$. Следовательно, $D \cap M \in \Sigma_{H,M}$. По лемме 3 $D \cap M \in \Sigma$, что противоречит тому, что $D \in \Sigma_{min}$. Поэтому $N \not\subseteq D$. Значит, ввиду леммы 4 в A найдется дополнение к N, содержащее D. Лемма доказана.

Лемма 6. Если N — идеал в A и $D \in \Sigma_{min}$, то $D + N \in (\Sigma_{H+N,A})_{min}$.

Доказательство. Если $N \supseteq N_1$, где N_1 — идеал в A, то по индукции $(D + N_1/N_1)/(N/N_1) \in (\Sigma_{(H+N/N_1)/(N/N_1),(A/N_1)/(N/N_1)})_{min}$. Поэтому будем считать, что N — минимальный идеал в A. Рассмотрим два следующих случая:

1) Если $N \subseteq D$, то $H + N \subseteq D$ и так как $D \in (\Sigma_{H,A})_{min}$, то $D + N = D \in (\Sigma_{H+N,A})_{min}$.

2) $N \not\subseteq D$. По лемме 5 в A найдется дополнение M к N, содержащее D. По лемме 2 $D + N \in \Sigma_{H+N,A}$. Выберем $D_1 \in (\Sigma_{H+N,A})_{min}$ такую, что $D_1 \subseteq D + N$. Тогда, так как $A/N = M + N/N \simeq M/M \cap N = M/\{0\}$ и $D_1/N = (M + N) \cap D_1/N = (M \cap D_1) + N/N \simeq M \cap D_1/M \cap D_1 \cap N = (M \cap D_1)/\{0\}$, то интервал $[M \cap D_1, M]$ изоморфен интервалу $[D_1, A]$. Следовательно, $M \cap D_1 \in \Sigma_{H,M}$. По лемме 3 $M \cap D_1 \in \Sigma$. Но так как $D \in \Sigma_{min}$ и $M \cap D_1 \subseteq D$, то $M \cap D_1 = D$. Поэтому $D + N = (M \cap D_1) + N = (M + N) \cap D_1 = D_1 \in (\Sigma_{H+N,A})_{min}$. Лемма доказана.

Определение 3. Пусть

$$\{0\} = A_0 \subset ... \subset A_n = A \ (1)$$

— произвольный главный ряд мультикольца A. Фактор $A_i/A_{i-1} (i = 1, 2, ..., n)$ назовем H-фраттиниевым, если в A найдется максимальная подалгебра, содержащая H, которая этот фактор изолирует. Подалгебру B мультикольца A назовем H-профраттиниевой в A, если найдутся такие максимальные в A подалгебры $M_1, M_2, ..., M_t$, изолирующие все различные H-фраттиниевы факторы ряда (1) и содержащие H, что $B = M_1 \cap ... \cap M_t$. Если же ряд (1) не содержит H-фраттиниевых факторов, то H-профраттиниевой подалгеброй в A будем считать само A.

Теорема 1. Пусть Θ — множество H-профраттиниевых подалгебр мультикольца A. Тогда $\Theta = \Sigma_{min}$.

Доказательство. Покажем вначале, что $\Theta \subseteq \Sigma$. Пусть $D \in \Theta$. Покажем, что $D + A_1/A_1$ — $(H + A_1/A_1)$-профраттиниева подалгебра в A/A_1.

Пусть фактор $A_1/\{0\}$ не являетя H-фраттиниевым. Тогда очевидно, что фактор A_i/A_{i-1} является H-фраттиниевым тогда и только тогда, когда фактор $(A_i/A_1)/(A_{i-1}/A_1)$ является $(H + A_1/A_1)$-фраттиниевым в A/A_1. Если ряд (1) не содержит H-фраттиниевых факторов, то $D = A$ и $D + A_1/A_1 = A/A_1$ — $(H + A_1/A_1)$-профраттиниева подалгебра в A/A_1. Поэтому полагаем, что $D = M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_t}$, где M_{i_j} — максимальная в A подалгебра, содержащая H и изолирующая A_{i_j}/A_{i_j-1}. Так как $A_1 \subseteq M_{i_j}$, то $A_1 \subseteq D$ и $D + A_1/A_1 = D/A_1 = (M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_t})/A_1 = (M_{i_1}/A_1) \cap ... \cap (M_{i_t}/A_1)$, причем M_{i_j}/A_1 изолирует $(A_{i_j}/A_1)/(A_{i_j-1}/A_1)$ и содержит $H + A_1/A_1$. Значит, $D + A_1/A_1$ — $(H + A_1/A_1)$-профраттиниева подалгебра в A/A_1.

Пусть теперь фактор $A_1/\{0\}$ H-фраттиниев в A и $D = M_1 \cap M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_t}$, где M_1, M_{i_j} — максимальные в A подалгебры, содержащие H и изолирующие соответственно факторы $A_1/A_0, A_{i_j}/A_{i_j-1}$. Если ряд (1) не содержит Н-фраттиниевых факторов, отличных от $A_1/\{0\}$, то $D = M_1$ и $D + A_1/A_1 = A/A_1$ — $(\mathrm{H} + A_1/A_1)$-профраттиниева подалгебра в A/A_1. В противном случае $D + A_1/A_1 = (M_1 \cap M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_t}) + A_1/A_1 = (M_1 + A_1) \cap (M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_t})/A_1 = M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_t}/A_1 = (M_{i_1}/A_1) \cap ... \cap (M_{i_t}/A_1)$ — $(H + A_1/A_1)$-профраттиниева подалгебра в A/A_1.

По индукции интервал $[D + A_1, A]$ дополняем. Значит, $D + A_1 \in \Sigma$. Если фактор A_1/A_0 не является Н-фраттиниевым, то $A_1 \subseteq D$ и $D = D + A_1 \in \Sigma$. Если же фактор $A_1/\{0\}$ Н-фраттиниев, то для A_1 найдется дополнение M в A, содержащее D. Так как $D + A_1/A_1 \simeq D/D \cap A_1 = D/\{0\}$, $A/A_1 = M + A_1/A_1 \simeq M/M \cap A_1 = M/\{0\}$, то интервал $[D, M]$ изоморфен интервалу $[D + A_1, A]$. Поэтому интервал $[D, M]$ дополняем. По лемме 3 $D \in \Sigma$.

Покажем теперь, что если $D \in \Theta$, то D изолирует Н-фраттиниевы факторы ряда (1) и покрывает остальные факторы этого ряда. По индукции $D + A_1/A_1$ изолирует Н-фраттиниевы факторы ряда $A_1/A_1 \subset ... \subset A/A_1$ и покрывает остальные факторы этого ряда. Если фактор $A_1/\{0\}$ не является Н-фраттиниевым, то $A_1 \subseteq D = D + \{0\}$, т.е. D покрывает $A_1/\{0\}$. Если же фактор $A_1/\{0\}$ Н-фраттиниев, то A_1 имеет дополнение M, содержащее D. Следовательно, $D \cap A_1 = \{0\}$, т.е. D изолирует фактор $A_1/\{0\}$.

Пусть $A_i/A_{i-1} (i = 2, ..., n)$ — Н-фраттиниевый фактор ряда (1). Тогда фактор $(A_i/A_1)/(A_{i-1}/A_1)$ Н-фраттиниев. Следовательно, $(D + A_1/A_1) \cap (A_i/A_1) \subseteq A_{i-1}/A_1$. Значит, $(D + A_1) \cap A_i = (D \cap A_i) + A_1 \subseteq A_{i-1}$ и $D \cap A_i \subseteq A_{i-1}$, т.е. D изолирует фактор A_i/A_{i-1}.

Пусть теперь фактор $A_i/A_{i-1} (i = 2, ..., n)$ не является Н-фраттиниевым. Тогда $D + A_1/A_1$ покрывает фактор $(A_i/A_1)/(A_{i-1}/A_1)$. Следовательно, $A_i \subseteq (D + A_1) + A_{i-1} = D + A_{i-1}$, т.е. D покрывает фактор A_i/A_{i-1}.

Нетрудно показать, что если $D \in \Theta$, то $|D|$ равен произведению порядков факторов ряда (1), не являющихся Н-фраттиниевыми. Поэтому все подалгебры из Θ изоордны.

Покажем теперь, что $\Sigma_{min} \subseteq \Theta$. Пусть $D \in \Sigma_{min}$ и A_i/A_{i-1} — фактор ряда (1). По лемме 6 $D + A_{i-1}/A_{i-1} \in (\Sigma_{H+A_{i-1}/A_{i-1}, A/A_{i-1}})_{min}$. Так как A_i/A_{i-1} — минимальный идеал в A/A_{i-1}, то по лемме 5 если фактор A_i/A_{i-1} Н-фраттиниев, то в A/A_{i-1} найдется дополнение M/A_{i-1} к A_i/A_{i-1}, содержащее $D + A_{i-1}/A_{i-1}$. Поэтому $(D + A_{i-1}/A_{i-1}) \cap (A_i/A_{i-1}) = (D + A_{i-1}) \cap A_i/A_{i-1} = (D \cap A_i) + A_{i-1}/A_{i-1} = A_{i-1}/A_{i-1}$. Значит, $D \cap A_i \subseteq A_{i-1}$, т.е. D изолирует фактор A_i/A_{i-1}. Если же фактор A_i/A_{i-1} не является Н-фраттиниевым и $A_i \not\subseteq D + A_{i-1}$, то $A_i/A_{i-1} \not\subseteq D + A_{i-1}/A_{i-1}$. Поэтому $A_i/A_{i-1} \not\subseteq M/A_{i-1}$ для некоторой подалгебры $M/A_{i-1} \in [H + A_{i-1}/A_{i-1}, A/A_{i-1}]_{max}$, что противоречит тому, что фактор A_i/A_{i-1} не является Н-фраттиниевым. Поэтому $A_i \subseteq D + A_{i-1}$, т.е. D покрывает A_i/A_{i-1}.

Если ряд (1) не содержит Н-фраттиниевых факторов, то D покрывает все факторы этого ряда. Следовательно, $D = D + \{0\} \supseteq D + A_1 \supseteq D + A_2 \supseteq ... \supseteq D + A = A$, т.е. $D = A$ и, значит, $D \in \Theta = \{A\}$. Поэтому будем полагать, что ряд (1) содержит Н-фраттиниевы факторы и пусть A_i/A_{i-1} — один из таких факторов. Тогда по лемме 5 в A/A_{i-1} найдется дополнение M/A_{i-1} к A_i/A_{i-1}, содержащее $D + A_{i-1}/A_{i-1}$. Подалгебра M максимальна в A, $M \supseteq D \supseteq H$ и M изолирует A_i/A_{i-1}. Значит, $D \subseteq D_1$, где $D_1 \in \Theta$. Так как D и D_1 покрывают одни и те же факторы ряда (1), то $|D| = |D_1|$. Следовательно, $D = D_1 \in \Theta$.

Итак, $\Sigma_{min} \subseteq \Theta \subseteq \Sigma$, все подалгебры из Θ изоордны. Значит, $\Theta = \Sigma_{min}$. Теорема доказана.

С учетом теоремы 1 определение Н-профраттиниевых подалгебр можно переформулировать следующим образом:

Определение 4. Подалгебру B мультикольца A назовем H-профратти- ниевой в A, если для любого A-главного ряда найдутся такие максимальные в A подалгебры $M_1, M_2, ..., M_t$, изолирующие все различные H-фраттиниевы факторы этого ряда и содержащие H, что $B = M_1 \cap ... \cap M_t$. Если же данный ряд не содержит H-фраттиниевых факторов, то H-профраттиниевой подалгеброй в A будем считать само A.

Заметим, что при доказательстве теоремы 1 мы попутно доказали, что H-профраттиниевы подалгебры мультикольца A изолируют H-фраттиниевы A-главные факторы и покрывают остальные A-главные факторы. Кроме того, все H-профраттиниевы подалгебры мультикольца A изоордны. Из леммы 6 следует, что если N — идеал мультикольца A и D — H-профраттиниева подалгебра в A, то $D + N/N$ — $(H + N/N)$-профраттиниева подалгебра в A/N.

Следствие. Пусть B и C — H-профраттиниевы подалгебры в A,

$$\{0\} = B_0 \subset ... \subset B_n = B$$

— некоторый композиционный ряд B,

$$\{0\} = C_0 \subset ... \subset C_m = C$$

— некотрый композиционный ряд C. Тогда m = n и между факторами этих рядов можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы изоморфны.

Доказательство. Пусть

$$\{0\} = A_0 \subset ... \subset A_p = A \ (2)$$

— произвольный главный ряд мультикольца A. Достаточно показать, что для любого $i \in 1, 2, ..., p$ фактор $A_i \cap B/A_{i-1} \cap B$ изоморфен фактору $A_i \cap C/A_{i-1} \cap C$. Как было показано в теореме 1 B и C либо изолируют любой фактор ряда (2), либо покрывают его. Пусть $i \in 1, 2, ..., p$. B и C изолируют фактор A_i/A_{i-1}. Тогда $A_i \cap B/A_{i-1} \cap B \simeq (A_i \cap B) + A_{i-1}/A_{i-1} = A_{i-1}/A_{i-1} = (A_i \cap C) + A_{i-1}/A_{i-1} \simeq A_i \cap C/A_{i-1} \cap C$. Если же B и C покрывают A_i/A_{i-1}, то $A_i \cap B/A_{i-1} \cap B \simeq (A_i \cap B) + A_{i-1}/A_{i-1} = A_i/A_{i-1} = (A_i \cap C) + A_{i-1}/A_{i-1} \simeq A_i \cap C/A_{i-1} \cap C$. Следствие доказано.

Если A — конечная разрешимая группа, из утверждений данной работы автоматически получаются соответствующие результаты Хаука и Курцвейля [3]. При $H = \{0\}$ понятие H-профраттиниевых подалгебр совпадает с понятием профраттиниевых подалгебр. Поэтому из результатов работы вытекают как частные случаи соответствующие результаты Гашюца [1].

Abstract. H-profrattini subalgebras of finite multirings are investigated.

Литература

1. W. Gaschütz, Praefrattinigruppen, Arch. Math., **13**, № 3 (1962), 418–426.

2. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, Формации алгебраических систем, Москва, Наука, 1989.

3. P. Hauck, H. Kurzwell, A lattice theoretic characterization of prefrattini subgroups, Manuscr. Math., **66** (1990), 295–301.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 14.04.06