Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.542

Характеризация некоторых классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных подгрупп

В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук

Хорошо известно, что группа G нильпотентна, если любые ее силовские подгруппы субнормальны в G. Обобщением субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости подгруппы, введенное Кегелем в работе [1].

Определение 1. Назовем подгруппу H $\mathfrak{F}$-достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Настоящая работа посвящена изучению строения конечных групп с заданной системой $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. В частности, с помощью $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп получена характеризация конечных разрешимых групп с нильпотентной длиной $\leq n$ ($n \geq 2$), разрешимых групп с p-длиной ≤ 1, сверхразрешимых групп.

Рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в [2].

Напомним, что $\mathfrak{N}^n$ — формация всех разрешимых групп с нильпотентной длиной $\leq n$; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G; $|\pi(G)|$ — число всех простых делителей порядка группы G.

В следующей лемме приведены свойства $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;

2) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G;

3) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K и K — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;

4) если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;

5) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то HN — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, а HN/N — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N;

6) если $N \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G тогда и только тогда, когда H/N — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N.

Доказательство. 1) Пусть H — подгруппа группы G, содержащая $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. А так как любая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-достижимой в G, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

2) Пусть H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда, по определению, существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Пусть K — некоторая подгруппа из G. Рассмотрим цепь подгрупп:

$$K = H_0 \cap K \supseteq H_1 \cap K \supseteq \ldots \supseteq H_m \cap K = H \cap K.$$

Если подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, то подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$. Пусть $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то из $H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Теперь ввиду изоморфизма

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \simeq H_{i-1} \cap K/H_{i-1} \cap K \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}$$

имеем

$$H_{i-1} \cap K/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K \in \mathfrak{F}$$

Значит,

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K$. Итак, для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$, либо $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K$. Отсюда, по определению, $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы K.

Утверждение 3) следует непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-дост ижимости.

Утверждение 4) следует теперь из утверждения 2) и 3).

5) Пусть H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда, по определению, существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Рассмотрим следующую цепь подгрупп

$$G = H_0N \supseteq H_1N \supseteq \ldots \supseteq H_mN = HN.$$

Если подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, то подгруппа H_iN нормальна в $H_{i-1}N$. Пусть $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Тогда

$$(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}}N = (H_i)^{\mathfrak{F}}N.$$

Отсюда следует, что

$$(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \subseteq H_iN.$$

Итак, для каждого $i - 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_iN нормальна в $H_{i-1}N$, либо $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN$. Отсюда, по определению, HN — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

Тогда

$$(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} = (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N/N.$$

Поэтому для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_iN/N нормальна в $H_{i-1}N/N$, либо $(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN/N$. Значит, HN/N — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N. Утверждение 5) леммы доказано.

Утверждение 6) нетрудно получить из 5). Лемма доказана.

□

Напомним, что группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но любая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Множество всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп обозначают через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Лемма 2. *[3] Пусть G — разрешимая группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$, где n — натуральное число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $2 \leq |\pi(G)| \leq n+1$;

2) если $|\pi(G)| = n+1$, то G — дисперсивная группа.

Лемма 3. *[4] Пусть G — разрешимая группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G^{\mathfrak{F}}$ — примарная группа;

2) если G — p-замкнутая группа, где $p \in \pi(G)$, то $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 4. *Пусть G — разрешимая группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — формация всех разрешимых групп с p-длиной ≤ 1. Тогда $|\pi(G)| = 2$.*

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Если $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то G — дисперсивная группа и либо $|\pi(G)| = 2$, либо $|\pi(G)| = 3$.*

Лемма 6. *Если $G = AB$, где A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы из G взаимно простых индексов, то G сверхразрешима.*

Теорема 1. *Разрешимая группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{N}^n$, где $n \geq 2$, когда любая подгруппа H с $2 \leq |\pi(G)| \leq n$ $\mathfrak{N}^n$-достижима в G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $G \in \mathfrak{N}^n$. Так как $\mathfrak{N}^n$ — наследственная формация, то согласно лемме 1 любая подгруппа из G $\mathfrak{N}^n$-достижима в G.

Достаточность. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не верна. Пусть H — произвольная собственная подгруппа группы G. Покажем, что для H условия теоремы выполняются. Действительно, пусть B — произвольная подгруппа группы H, такая, что $2 \leq |\pi(B)| \leq n$. Согласно условию B $\mathfrak{N}^n$-достижима в G. Согласно лемме 1 подгруппа B $\mathfrak{N}^n$-достижима в H. Так как $|H| < |G|$, то $H \in \mathfrak{N}^n$. А это значит, что G — минимальная не $\mathfrak{N}^n$-группа. Согласно лемме 2 $2 \leq |\pi(G)| \leq n+1$.

Пусть $|\pi(G)| = 2$. Согласно лемме 3 $G^{\mathfrak{N}^n}$ — примарная p-группа. Если $G^{\mathfrak{N}^n}$ — силовская подгруппа группы G, то $G \in \mathfrak{N}^2$, что невозможно.

Итак, $G^{\mathfrak{N}^n}$ — собственная подгруппа из G_p. Причем $G^{\mathfrak{N}^n} \not\subseteq \Phi(G)$. В противном случае $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^n$. Отсюда ввиду насыщенности формации $\mathfrak{N}^n$ следует, что $G \in \mathfrak{N}^n$. Получили противоречие.

Следовательно, в G найдется максимальная подгруппа M, такая, что $G = G^{\mathfrak{N}^n} M$. Так как $|\pi(G)| = 2$, $G^{\mathfrak{N}^n} \subset G_p$, то M — бипримарная подгруппа. Согласно условию M — $\mathfrak{N}^n$-достижимая подгруппа группы G.

Пусть M — нормальная подгруппа группы G. Так как $\mathfrak{N}^n$ — формация Фиттинга и $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}^n$, $M \in \mathfrak{N}^n$, то $G \in \mathfrak{N}^n$. Получим противоречие.

Пусть M — $\mathfrak{N}^n$-нормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда $G^{\mathfrak{N}^n} \subseteq M$. А это значит, что $G = G^{\mathfrak{N}^n} M = M$. Получим противоречие.

Если $2 < |\pi(G)| \leq n+1$, то, как и выше, нетрудно получить противоречие.

Пусть $|\pi(G)| = n+1$. Согласно лемме 2 G — p-замкнутая группа, где $p \in \pi(G)$. Согласно лемме 3 $G_p = G^{\mathfrak{N}^n}$.

Итак, $G = G^{\mathfrak{N}^n} \leftthreetimes T$, где $|\pi(T)| = n$. Согласно условию теоремы T — $\mathfrak{N}^n$-достижимая подгруппа группы G. Согласно определению 1 сущесвует цепь подгрупп

$$G = T_0 \supseteq T_1 \supseteq \ldots \supseteq T_m = T,$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ лиюо подгруппа T_i нормальна в T_{i-1}, лиюо $(T_{i-1})^{\mathfrak{N}^n} \subseteq T_i$.

Пусть T_1 — первая собственная подгруппа группы G в данной цепи. Так как G — минимальная не $\mathfrak{N}^n$-группа, то $T_1 \in \mathfrak{N}^n$. Если T_1 — нормальная подгруппа группы G, то из того факта, что $\mathfrak{N}^n$ — формация Фиттинга и $G = G^{\mathfrak{N}^n} T_1$ следует, что $G \in \mathfrak{N}^n$. Получили проитиворечие.

Пусть $G^{\mathfrak{N}^n} \subseteq T_1$. Тогда $G = G^{\mathfrak{N}^n} T_1 = T_1$. Получили противоречие. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Разрешимая группа G тогда и только тогда метанильпотентна, когда любая ее бипримарная подгруппа $\mathfrak{N}^2$-достижима в G.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех разрешимых групп с p-длиной не более единицы. Тогда и только тогда в разрешимой группе G p-длина ≤ 1, когда любая бипримарная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Доказательство. Достаточность. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не верна. Как и в теореме 1, нетрудно показать, что для любой собственной подгруппы H условия теоремы выполнены. А это значит, что $l_p(H) \leq 1$. Следовательно, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Согласно лемме 4 $|\pi(G)| = 2$. Согласно лемме 3 $G^{\mathfrak{F}}$ — примарная подгруппа. Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$, то $l_p(G/\Phi(G)) \leq 1$. Так как $\mathfrak{F}$ насыщенная формация, то $l_p(G) \leq 1$. Получили противоречие. Итак, $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$. А это значит, что в G найдется максимальная подгруппа H, такая, что $G = G^{\mathfrak{F}}H$.

Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$. Если $G^{\mathfrak{F}}$ — q-группа, то из того факта, что $l_p(G/G^{\mathfrak{F}}) = l_p(G)$, следует, что $l_p(G) \leq 1$. Получим противоречие. Пусть $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Если $G^{\mathfrak{F}}$ — силовская p-подгруппа из G_p, то нетрудно показать, что $l_p(G) \leq 1$. Получили противоречие. Итак, $G^{\mathfrak{F}}$ — собственная p-подгруппа из G_p. А это значит, что подгруппа H бипримарна. Согласно условию теоремы H $\mathfrak{F}$-достижима в G.

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Так как $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, $l_p(G^{\mathfrak{F}}) \leq 1$ и $l_p(H) \leq 1$, то отсюда следует, что $l_p(G) \leq 1$. Получили противоречие.

Пусть $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Тогда $G = G^{\mathfrak{F}}H = H$. Получили противоречие.

Необходимость. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то из леммы 1 следует, что любая подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех сверхразрешимых групп. Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда любая ее примарная и бипримарная подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Доказательство. Достаточность. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не верна. Как и в теореме 1, нетрудно показать, что для любой собственной подгруппы H условия теоремы выполнены. А это значит, что H — сверхразрешимая подгруппа. Следовательно, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Согласно лемме 5 либо $|\pi(G)| = 2$, либо $|\pi(G)| = 3$. Пусть $|\pi(G)| = 2$. Тогда согласно лемме 5 $G = G_p \lambda G_q$. Согласно лемме 3 $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Ясно, что $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$. Следовательно, в G найдется максимальная подгруппа H, такая, что $G = G^{\mathfrak{F}}H$. Так как H либо примарная подгруппа, либо бипримарная, то согласно условию H — $\mathfrak{F}$-достижимая в G.

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Так как $\left(|G : G^{\mathfrak{F}}|, |G : H|\right) = 1$ и $G^{\mathfrak{F}}$, H — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G, то согласно лемме 6 G сверхразрешимая группа. Получили противоречие.

Пусть H — $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. А это значит, что $G = G^{\mathfrak{F}}H = H$. Получили противоречие.

Пусть $|\pi(G)| = 3$. Тогда $G = G_p \lambda B$. Ввиду леммы 3 $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Так как B бипримарная подгруппа группы G, то согласно условию B — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппао группы G. Согласно определению 1 существует цепь подгрупп

$$G = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_m = B,$$

такая, что для любого $i = 1, , 2, \ldots, m$ либо B_i нормальна в B_{i-1}, либо $(B_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq B_i$.

Пусть B_1 — первая собственная подгруппа группы G в данной цепи. Так как G — минимальная несверхразрешимая группа, то B_1 — сверхразрешимая подгруппа. Очевидно, что $G = G^{\mathfrak{F}} B_1$.

Пусть B_1 — нормальная подгруппа группы G. Так как B_1, $G^{\mathfrak{F}}$ сверхразрешимы и их индексы в G взаимно просты, то по лемме 6 получаем сверхразрешимость группы G. Получили противоречие.

Пусть $G^{\mathfrak{F}} \subseteq B_1$. Тогда $G = G^{\mathfrak{F}} B_1 = B_1$. Получили противоречие. Теорема доказана. □

Abstract. The following results about finite groups are proved.

Theorem 1. *A solvable group G belongs to $\mathfrak{N}^n$, where $n \geq 2$, iff every subgroup H with $2 \leq |\pi(G)| \leq n$ is $\mathfrak{N}^n$-reachable in G.*

Theorem 2. *Let be $\mathfrak{F}$ be the set of all solvable groups with p-length at most 1. A solvable group G has p-length ≤ 1 iff every biprimary subgroup in G is $\mathfrak{F}$-reachable in G.*

Theorem 3. *Let be $\mathfrak{F}$ be the set of all supersolvable groups. A group G is supersolvable iff every its primary and biprimary subgroup is $\mathfrak{F}$-reachable in G.*

Литература

1. O. H. Kegel, Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten, Arch. Math., **30** (1978), 225–228.

2. Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

3. В. Н. Семенчук, О тотально-локальных формациях, Вопросы алгебры, Минск, Изд-во "Университетское", № 6 (1993), 24–30.

4. В. Н. Семенчук, Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы, Алгебра и логика, **18**, № 3 (1979), 348–382.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.04.06