Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(50), Ч1, 2008

УДК 681.3.06:624.13

Компьютерный анализ реологических деформационных процессов в системах твёрдых тел

В. Е. Быховцев, В. В. Бондарева, Л. А. Цурганова

Введение

Для многих твёрдых тел характерно изменение во времени напряжённо-деформированного состояния при постоянной внешней нагрузке. Для конкретизации дальнейших выкладок в настоящей работе в качестве деформируемых твёрдых тел рассматриваются грунты. Для исследования деформаций грунтов во времени при постоянной внешней нагрузке в настоящее время применяют теорию ползучести или теорию ползучести с одновременным учётом фильтрационной консолидации. Экспериментально доказано, что деформации скелета грунта могут быть описаны законом линейной наследственной ползучести Больцмана – Вольтерры [1, 2, 3]. Теория наследственной ползучести включает в себя все теории, базирующиеся на линейных реологических моделях. В силу указанной общности теории наследственной ползучести Больцмана – Вольтерры представляется возможным повысить точность исследования деформаций грунтовых оснований математическими методами.

В настоящей работе в соответствии с законом линейной наследственной ползучести Больцмана – Вольтерры изложены разработанные авторами оригинальные математическая модель, алгоритм на основе метода конечных элементов и программное обеспечение для численного исследования вязкоупругого деформирования неоднородного грунтового основания.

Математическая модель вязкоупругого деформирования неоднородного грунтового основания

В общем случае математическая модель деформирования системы твёрдых тел содержит следующие основные элементы: уравнение деформационного процесса (механико-математическая модель), геометрическая модель, условия связи с внешней средой (граничные условия), условия стационарности системы. Наполнение этих элементов определяется содержанием конкретной задачи. Наиболее эффективным методом исследования математической модели реологического деформационного процесса будет метод конечных элементов [4, 5]. В плане этого метода рассмотрим содержание основных элементов структуры математической модели рассматриваемого класса задач [5].

Уравнение деформационного процесса

Закон линейной наследственной ползучести Больцмана – Вольтерры в интегральной форме имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0}\left[\sigma(t) + \int_0^t K(t,\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau\right], \tag{1}$$

где K(t,τ) – *ядро ползучести*, характеризует реологические свойства деформируемой среды; σ – полное напряжение; ε – деформация; E_0 – модуль деформации. Ядро K(t, τ) является положительной монотонно убывающей функцией.

Если деформация ε(*t*) известна, то уравнение (1) должно решаться относительно напряжения σ (t). В этом случае интегральное уравнение второго порядка Вольтерры получает следующий вид:

$$\sigma(t) = E_0\left[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t,\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau\right] \quad , \tag{2}$$

где R(t, τ) – *ядро релаксации*, является *резольвентой ядра ползучести*.

Теория ползучести, характеризуемая интегралом связи типа (1), носит наименование теории наследственности, так как она исходит из принципа влияния предшествовавшего напряженного состояния на его действительное состояние.

Физические уравнения для вязкоупругих тел представим в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_x(t) = 2G(t)(1-\Gamma_c)(\varepsilon_x(t) - \varepsilon_{cp}(t)) + 3\mathrm{K}(t)(1-\Gamma_0)\varepsilon_{cp}(t); \\ \sigma_y(t) = 2G(t)(1-\Gamma_c)(\varepsilon_y(t) - \varepsilon_{cp}(t)) + 3\mathrm{K}(t)(1-\Gamma_0)\varepsilon_{cp}(t);, \\ \tau_{xy}(t) = G(t)(1-\Gamma_c)\gamma_{xy}(t); \end{cases} \tag{3}$$

где $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$, $\tau_{xy}(t)$ – компоненты вектора напряжения;

$\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$, $\gamma_{xy}(t)$ – компоненты вектора деформации;

$\varepsilon_{cp}(t) = \dfrac{\varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(t)}{2}$;

$G(t)$ – модуль сдвига;

$K(t)$ – модуль объёмной деформации;

Γ_o, Γ_c – операторы объёмной и сдвиговой релаксации.

Предположим, что при вязкоупругом деформировании объёмные деформации будут упругими, тогда $K(t)(1-\Gamma_o) \equiv K(t)$. Выразим модуль сдвига $G(t)$ и модуль объёмной деформации $K(t)$ через модуль Юнга $E(t)$ и коэффициент Пуассона $\mu(t)$. С учётом принятой гипотезы об упругости объёмных деформаций выражение (3) представим в скалярной форме. Для первого уравнения (3) будем иметь

$$\sigma_x(t) = \frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\left(\varepsilon_x(t) + \mu(t)\varepsilon_y(t)\right) - \left(\int_0^t \varGamma_c(t,\xi)\varepsilon_x(\xi)d\xi - \int_0^t \varGamma_c(t,\xi)\varepsilon_y(\xi)d\xi\right). \tag{4}$$

Рассмотрим интеграл вида: $I = \int_0^t \varGamma_c(t,\xi)\varepsilon(\xi)d\xi$.

Ядро релаксации примем в виде [1]:

$$\varGamma(t,\xi) = \delta G(t)\exp(-\delta_1(t-\xi)), \tag{5}$$

где δ и δ_1 – параметры релаксации.

Применяя теорему о среднем, для выражения I получим:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon(t_i)G(t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\delta\exp(-\delta_1(t-\xi))d\xi = \frac{\delta}{\delta_1}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\varepsilon(t_i)G(t_i)(\exp(-\delta_1(t-t_{i+1})) - \exp(-\delta_1(t-t_i)))\right). \tag{6}$$

Используя (6), выражения для напряжений (3, 4) можно переписать в виде

$$\sigma_x(t_{i+1}) = \frac{E(t_{i+1})}{1-\mu(t)^2}\left(\varepsilon_x(t_{i+1}) + \mu(t)\varepsilon_y(t_{i+1})\right) -$$

$$- \frac{\delta}{\delta_1}\sum_{j=0}^{i}\left[G(t_j)(\exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_{j+1})) - \exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_j)))\left(\varepsilon_x(t_j) - \varepsilon_y(t_j)\right)\right]$$

$$\sigma_y(t_{i+1}) = \frac{E(t_{i+1})}{1-\mu(t)^2}\left(\mu(t)\varepsilon_x(t_{i+1}) + \varepsilon_y(t_{i+1})\right) -$$

$$- \quad \frac{\delta}{\delta_1}\sum_{j=0}^{i}\left[G(t_j)(\exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_{j+1})) - \exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_j)))\left(-\varepsilon_x(t_j) + \varepsilon_y(t_j)\right)\right],$$

$$\tau_{xy}(t_{i+1}) = \frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\frac{1-\mu(t)}{2}\gamma_{xy}(t_{i+1}) - \frac{\delta}{\delta_1}\sum_{j=0}^{i}\left[G(t_j)(\exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_{j+1})) - \exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_j)))\gamma_{xy}(t_j)\right].$$

В матричной форме эти уравнения будут иметь вид:

$$\{\sigma\}_{i+1} = [E]_{i+1}\{\varepsilon\}_{i+1} - \frac{\delta}{\delta_1}G\sum_{j=0}^{i}\left([D]_{j,i}\{\varepsilon\}_j\right), \tag{7}$$

где $\{\sigma\}_{i+1} = \{\sigma_x(t_{i+1}) \quad \sigma_y(t_{i+1}) \quad \tau_{xy}(t_{i+1})\}^T$, $\{\varepsilon\}_{i+1} = \{\varepsilon_x(t_{i+1}) \quad \varepsilon_y(t_{i+1}) \quad \gamma_{xy}(t_{i+1})\}^T$,

$$[E]_{i+1} = \frac{E(t_{i+1})}{1-\mu(t)^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu(t) & 0 \\ \mu(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu(t)}{2} \end{bmatrix},$$

$$[D]_{j,i} = (\exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_{j+1})) - \exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_j)))\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для нахождения вязкоупругого напряжённо-деформированного состояния грунтового основания необходимо знать всю предысторию деформирования, т.е. деформации $\{\varepsilon\}_0, \{\varepsilon\}_1, \{\varepsilon\}_2 \ldots$ В начальный момент времени деформации $\{\varepsilon\}_0$ могут быть найдены из решения упругой задачи.

Плотность энергии в соответствии с принципом возможных перемещений для момента времени t_{i+1} будем иметь:

$$\{\tilde{g}\}_{i+1}^T\{R\} = \iint_S \{\tilde{\varepsilon}\}_{i+1}^T\{\sigma\}_{i+1}\,dS, \tag{8}$$

где $\{g\}_{i+1}$ – вектор узловых перемещений в $(i+1)$ – й момент времени, символ “$\sim$” означает вариацию, $\{R\}$ – вектор узловых усилий.

Используя основные соотношения метода конечных элементов [5], преобразуем (7) и для произвольного момента времени получим:

$$\{\sigma\}_{i+1} = [E]_{i+1}[B][A]^{-1}\{g_{узл}\}_{i+1} + \frac{\delta}{\delta_1}\sum_{j=0}^{i}\left(G(t_j)[D]_{j,i}[B][A]^{-1}\{g_{узл}\}_j\right) \tag{9}$$

Подставив (9) в (8), будем иметь:

$$\{\tilde{g}_{узл}\}_{i+1}^T\{R\} = \int_0^b\int_0^a \{\tilde{g}_{узл}\}_{i+1}\left[A^{-1}\right]^T[B]^T\left([E]_{i+1}[B][A]^{-1}\{g_{узл}\}_{i+1} - \frac{\delta}{\delta_1}\sum_{j=0}^{i}\left(G(t_j)[D]_{j,i}[B][A]^{-1}\{g_{узл}\}_j\right)\right)dxdy,$$

где a, b – размеры конечного элемента вдоль осей X и Y соответственно.

Учитывая, что матрицы $[A]$ и $[B]$ не зависят от координат, то их можно вынести за знак интеграла, тогда, проинтегрировав, будем иметь:

$$\{R\} = S\left[A^{-1}\right]^T [B]^T [E]_{i+1} [B]\left[A^{-1}\right]\{g_{узл}\}_{i+1} - S[E_{вязк}], \tag{10}$$

где S – площадь конечного элемента,

$$[E_{вязк}] = \frac{\delta}{\delta_1}\sum_{j=0}^{i}\left(\begin{array}{l} G(t_j)(\exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_{j+1})) - \\ - \quad \exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_j)))\left[A^{-1}\right]^T[B]^T\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}[B]\left[A^{-1}\right]\{g_{узл}\}_j \end{array}\right).$$

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$\{R_ф\}_{i+1} = [K]\{g_{узл}\}_{i+1}, \tag{11}$$

где $[K] = S\left[A^{-1}\right]^T [B]^T [E]_{i+1} [B]\left[A^{-1}\right]$ – матрица жёсткости конечного элемента,

$\{R_ф\}_{i+1}$ - вектор узловых усилий в момент времени t_{i+1}, причём:

$$\{R_ф\}_{i+1} = \{R\} + [E_{вязк}]. \tag{12}$$

Матрица жесткости для всей деформируемой системы будет равна

$$K_{ij}^{Гл} = \sum_{r=1}^{N} K_{ij}^{r},$$

где N – количество конечных элементов, на которые разбита рассматриваемая область; $K_{ij}^{Гл}$ - элемент матрицы $[K^{Гл}]$, характеризующий вклад j-го единичного перемещения в i-й компонент узловых сил системы; K_{ij}^{r} - элемент матрицы жесткости r-го элемента, характеризующий вклад j-го единичного перемещения в i-й компонент узловых сил.

В итоге будет получена система линейных алгебраических уравнений вида (11), многократное решение которой, после учёта граничных условий, позволит определить напряжённо-деформированное состояние системы дисперсных твёрдых тел.
Разработанный алгоритм реализован программно в среде DELPHI. Результат решения покажем на примере одной модельной задачи.

Модельная задача

На плитный фундамент размером 20м на 30м и толщиной 0.4м действует равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $q = 114кПа$. Модуль упругости плиты $E = 27 \cdot 10^3 МПа$, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}29$. Грунтовое основание представляет собой слой мергеля мощностью 6.5м. Ядро релаксации имеет вид (9), где $\delta = 0{,}05 \ ^1/_{сут}$, $\delta_1 = 0{,}02 \ ^1/_{сут}$, $E = 9МПа$, $\mu = 0{,}45$.

При решении задачи методом конечных элементов рассматриваемая область дискретизировалась 7200 конечными элементами в форме треугольников. Временной шаг выбирался равный 0,5 суткам. Время нахождения решения на отрезке от 0 до 1000 суток составило менее 30 секунд. Стабилизационная осадка 5.55 см приходится на точку 395 суток.

Заключение

1. Согласно результатам проведённого моделирования предлагаемая математическая модель, алгоритм и программное обеспечение могут быть использованы для исследования вязкоупругого деформирования неоднородных систем механики грунтов.

2. Достоинством предлагаемой математической модели и методики её исследования является возможность рассматривать напряжённо деформируемое состояние неоднородных систем механики грунтов с различными граничными условиями.

Abstract. The paper presents an original mathematical model and an algorithm of numeric investigation of rheological deformation processes in the systems of solids. The algorithm of the mathematical model investigation is worked out on the basis of the finite elements method which enables to take into account the heterogeneity of the solids system structure.

Литература

1. Вялов, С. С. Реологические основы механики грунтов / С. С. Вялов. – М: Высшая школа, 1978. – 446с.
2. Шукле, Л. Реологические проблемы механики грунтов / Л. Шукле.– М: Стройиздат, 1976. – 486с.
3. Старовойтов, Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: Учебник для строительных специальностей вузов / Э. И. Старовойтов – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344с.
4. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 540с.
5. Быховцев, В.Е. Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов / В. Е. Быховцев, А. В. Быховцев, В. В. Бондарева. – Гомель: УО «ГГУ им.Ф.Скорины», 2002. – 215с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 10.05.08