Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.542

О конечных группах с условием плотности для обобщенно субнормальных подгрупп

А. Э. Шмигирёв

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать обозначения из [1, 2].

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая насыщенная наследственная формация. Напомним, что группа G называется группой с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, если для любых двух различных подгрупп H и K группы G, из которых первая содержится во второй и не максимальна в ней, в группе G существует такая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N, что $H \subseteq N \subseteq K$. В этом случае также говорят, что множество $\mathfrak{F}$-субнормальных в G подгрупп плотно.

В статье [3] было выделено 8 типов групп в следующем определении.

Определение. Пусть G — $\pi(\mathfrak{F})$-группа, не принадлежащая непустой S-замкнутой p-нильпотентной формации $\mathfrak{F}$ такой, что $\pi(\mathfrak{F})$ содержит p. Скажем, что G является:

1) группой типа C_1, если G - не p-нильпотентная группа Шмидта с $|\Phi(G_p)| \leq p$;

2) группой типа C_2, если $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = G_p \leftthreetimes G_q$, G_q нециклическая, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G, $C_G(G_p)$ является нильпотентной максимальной подгруппой в G, а любая другая максимальная подгруппа из G, содержащая G_p, является группой Миллера-Морено;

3) группой типа C_3, если $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = G_p \leftthreetimes G_q$, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$, $G_q = N_G(G_q)$, в G имеется нильпотентная $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа, а также $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа, являющаяся группой Миллера-Морено;

4) группой типа C_4, если $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = P_1 \leftthreetimes (G_q \leftthreetimes P_2)$, где $P_1P_2 = G_p$, $|P_2| = p$, $\Phi(G_q)$ нормальна в G, G_q циклическая, P_1 — минимальная нормальная подгруппа в G, имеется точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются P_1G_q, P_2G_q и $G_p\Phi(G_q)$;

5) группой типа C_5, если $\pi(G) = \{p, q\}$, $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ — минимальная нормальная подгруппа в G, G_q является циклической максимальной подгруппой в G, $G_p\Phi(G_q)$ — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа C_3, $\Phi(G) = \Phi(\Phi(G_q))$ и $G/\Phi(G)$ — группа Фробениуса;

6) группой типа C_6, если $|\pi(G)| = 3$, $\pi(G) = \{p, q, r\}$ и если G_p, G_q и G_r — силовская база группы G, то G_pG_r нормальна в G, $\Phi(G_q)$ нормальна в G, одна из подгрупп G_p, G_r нормальна в G, G_q максимальна в G_qG_r, имеется точно три класса сопряженных максимальных подгрупп в G, представителями которых являются: $G_pG_q = G_p \leftthreetimes G_q$ — группа Миллера-Морено, G_qG_r и $G_pG_r\Phi(G_q)$;

7) группой типа C_7, если $|\pi(G)| = 3$, $\pi(G) = \{p, q, r\}$, $G = G_p \leftthreetimes (G_r \leftthreetimes G_q)$ — группа порядка $p^\alpha qr$, не являющаяся группой Фробениуса и имеющая точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются: G_pG_r — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа C_3, G_pG_q — группа типа C_4, G_rG_q;

8) группой типа C_8, если $|\pi(G)| = 3$, $\pi(G) = \{p, q, r\}$, $G = G_p \leftthreetimes (G_r \times G_q)$ — группа Фробениуса порядка $p^\alpha qr$, имеющая точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются: G_pG_r — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа C_3, G_pG_q — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа C_3, G_rG_q.

Построены примеры, подтверждающие, что группы типа C_1–C_8 существуют.

В статье [3] также доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, G — не p-нильпотентная $\pi(\mathfrak{F})$-группа, у которой множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп плотно. Тогда G является группой одного из типов C_i для некоторого $i \in \{1 \dots 8\}$.

Нами получен следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп, G — группа одного из типов C_i для некоторого $i \in \{1 \dots 8\}$. Тогда G — группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Доказательство. Пусть $A \subset B$ — две произвольные подгруппы группы G, из которых первая не максимальна во второй. Надо показать, что в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $A \subseteq N \subseteq B$. Если $B = G$, то в качестве N можно взять группу G. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что $B \neq G$.

Покажем вначале, что группа $G = G_p \leftthreetimes G_q$, являющаяся группой Миллера-Морено, будет группой с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Очевидно, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ и $G_pQ \in \mathfrak{F}$ — $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа из G, где Q — максимальная подгруппа из G_q. Если $B \subseteq G_pQ$, то B $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Если $B \subseteq G_q$, то A не совпадает с G_q, и значит, $G_pA \subseteq G_pQ$. Получили, что A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Утверждение доказано.

1) Пусть теперь G — группа типа C_1. Если $|\Phi(G_p)| = 1$, то G_p — абелева группа и G — группа Миллера-Морено. В этом случае утверждение теоремы выполняется. Предположим, что $|\Phi(G_p)| = p$. Из того, что $B \neq G$, следует, что A не содержит силовской q-подгруппы группы G. Значит, $AG_p \neq G$. Так как $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ и $G_pA \in \mathfrak{F}$, то A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

2) Пусть теперь G — группа типа C_2 из [3]. Тогда $G_p = G^{\mathfrak{F}}$, $C_G(G_p)$ — нильпотентная $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа в G, а любая другая максимальная подгруппа, содержащая G_p, является группой Миллера-Морено. Если $B \subseteq C_G(G_p)$, то B $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Пусть теперь B содержится в $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппе M, отличной от $C_G(G_p)$. Тогда M — группа Миллера-Морено. По доказанному в ней существует подгруппа N такая, что $A \subseteq N \subseteq B$. Рассмотрим теперь случай, когда $B \subseteq G_q$. В этом случае A не максимальна в G_q. Тогда она содержится в некоторой максимальной подгруппе Q из G_q. Если $G_pQ = C_G(G_p)$, то A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Предположим, что $G_pQ \neq C_G(G_p)$. Тогда G_pQ — группа Миллера-Морено. Обозначим через Q^* силовскую q-подгруппу из $C_G(G_p)$. Покажем, что $A \subset Q^*$. Из того, что Q — циклическая группа, следует, что $\Phi(Q)$ максимальна в Q. Так как $A \neq Q$, то $A \subseteq \Phi(Q) \subseteq \Phi(G_q) \subseteq Q^*$. Тогда $A \subseteq G_pQ^* = C_G(G_p)$ и, значит, $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

3) Пусть теперь G — группа типа C_3 из [3]. Подгруппа G_pQ, где Q — максимальная подгруппа из G_q, является $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной в G. Из $G_pQ \in \mathfrak{F}$ следует, что если $B \subseteq G_pQ$, то B $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Известно, что в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа вида G_qP, которая является группой Миллера-Морено. Если $B \subseteq G_qP$, то A не содержит G_q. Поэтому $G_pA \neq G$ и A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Пусть M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G, отличная от G_qP. Из того, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ следует, что M содержит некоторую силовскую подгруппу G_q^x группы G. Тогда $M = P_1 \leftthreetimes G_q^x$ и P_1 — p-подгруппа нормальная в G. Если $P = P_1$, то M и G_qP сопряжены. Пусть $P \cap P_1 = 1$. Значит, $G_p = P \times P_1$. Подгруппа P_1 является минимальной нормальной подгруппой в G, в противном случае G_qP не максимальна в G. Следовательно, G_p — абелева группа. Если в M существует нормальная подгруппа $P_2 \subset P_1$, то $P_2 \lhd G$. Противоречие. Значит, P_1 — минимальная нормальная подгруппа группы M. По условию $G_pQ \in \mathfrak{F}$, поэтому $N_G(Q) = \langle G_p, G_q \rangle = G$. Получили $Q \subset G_q^x$ и M — группа Миллера-Морено. Поэтому если $B \subseteq M$, то A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

4) Пусть теперь G — группа типа C_4. Тогда в $G = P_1 \leftthreetimes (G_q \leftthreetimes P_2)$ имеется точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются P_1G_q, P_2G_q и $G_p\Phi(G_q)$. Пусть сначала $B \subseteq P_1G_q \lhd G$. Так как P_1 — минимальная нор-

мальная подгруппа в G, то $(P_1G_q)^{\mathfrak{F}} = P_1$. Тогда P_1G_q — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа C_3. По доказанному P_1G_q будет группой с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Пусть теперь $B \subseteq G_p\Phi(G_q)$. Так как $G_p\Phi(G_q)$ p-нильпотентна и $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то в $G_p\Phi(G_q)$ существует такая $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N, что $A \subset N \subset B$. Пусть теперь $B \subseteq G_qP_2$. Так как G_q максимальна в G_qP_2, то A не содержит G_q. Тогда $A \subseteq AG_p \subseteq \Phi(G_q)G_p$. Получили, что A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

5) Пусть $G = G_p \leftthreetimes G_q$ — группа типа C_5. В этом случае $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ и $G_p\Phi(G_q)$ является либо группой Миллера-Морено, либо группой типа C_3. Если $B \subseteq G_p\Phi(G_q)$, то согласно доказанному выше в $G_p\Phi(G_q)$ существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $A \subseteq N \subseteq B$. Следовательно, N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Пусть A не максимальна в G_q. Так как G_q — циклическая группа и $|G_q : \Phi(G)| = q^2$, то $A \subseteq \Phi(G)$. Таким образом, A $\mathfrak{F}$-субнормальна в $\Phi(G)$. Так как G разрешима, то $\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

6) Пусть G — группа типа C_6. Так как G_pG_q — группа Миллера-Морено, то $(G_pG_q)^{\mathfrak{F}} = G_p \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Тогда подгруппы $G_pG_r\Phi G_q$ и G_pG_q будут $\mathfrak{F}$-нормальными максимальными в G. Если $B \subseteq G_pG_r\Phi(G_q) \in \mathfrak{F}$, то B $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Пусть $B \subseteq G_pG_q$. Тогда по доказанному выше в G_pG_q существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $A \subseteq N \subseteq B$. Из того, что G_pG_q $\mathfrak{F}$-нормальна в G, получаем, что N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Расмотрим случай, когда $B \subseteq G_rG_q$. Так как G_q максимальна в G_rG_q, то A не содержит силовской q-подгруппы группы G. Подгруппа $G_pA \neq G$. Поэтому либо $G_pA \subseteq G_pG_r\Phi(G_q)$, либо $G_pA \subseteq G_pG_q$. Если $A \subseteq G_pG_r\Phi(G_q)$, то A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тогда $A \subset G_pG_q$. Отсюда следует, что $A \subseteq \Phi(G_q)$ и $A \subset G_pG_r\Phi(G_q)$.

Предположим теперь, что $G^{\mathfrak{F}} \supset G_p$. Тогда G_p не нормальна в G, так как в противном случае $G/G_p \in \mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Так как $G/G_rG_p \in \mathfrak{F}$ и G_r — минимальная нормальная подгруппа в G, то $G^{\mathfrak{F}} = G_rG_p$ и подгруппа $G_pG_r\Phi(G_q)$ является $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной в G. Пусть B содержится либо в G_pG_q, либо в G_rG_q. Так как G_q максимальна в G_pG_q и в G_rG_q, то подгруппа A не содержит силовской q-подгруппы группы G. Поэтому $G^{\mathfrak{F}}A \neq G$. Отсюда следует, что $A \subseteq G_pG_r\Phi(G_q) \in \mathfrak{F}$. Значит, A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Если $B \subseteq G_pG_r\Phi(G_q)$, то B $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

7) Пусть G — группа типа C_7 или C_8. Так как $G/G_p \in \mathfrak{F}$ и G_p — минимальная нормальная подгруппа в G, то G_pG_r и G_pG_q являются $\mathfrak{F}$-нормальными максимальными в G. По доказанному выше G_pG_r и G_pG_q являются группами с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Предположим, что $B \subseteq G_pG_r$ или $B \subseteq G_pG_q$. В этом случае найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N такая, что $A \subseteq N \subseteq B$. Так как $|G_rG_q| = rq$, то если $B \subseteq G_rG_q$, то A может быть только единичной группой. В этом случае A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Таким образом, мы показали, что группы типа C_1-C_8 являются группами с плотной системой $\mathfrak{F}$-субноральных подгрупп. Теорема доказана.

Abstract. Finite groups with a dense system of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups are considered.

Литература

1. Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

2. K. Doerk, T. Hawkes, Finite soluble groups, Berlin–New York, Walter de Grüyter, 1992.

3. Л. А. Шеметков, А. Э. Шмигирев, О конечных группах с плотной системой подгрупп, Доклады НАН Беларуси, № 6 (2004), 29–31.

Мозырьский государственный
педагогический университет

Поступило 14.04.06