Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Г. Н. КАЗИМИРОВ, С. М. ГОРСКИЙ

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Практическое пособие

для студентов специальности 1-31 03 03-01
«Прикладная математика (научно-производственная
деятельность)», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика
(научно-педагогическая деятельность)» и 1-31 03 01-02
«Математика (научно-педагогическая деятельность)»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 517. 9 (075.8)
ББК 22.16 я73
К147

Рецензенты:
доктор физико-математических наук А. П. Старовойтов,
кандидат физико-математических наук С. П. Новиков

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Казимиров, Г. Н.

К147 Теория меры и интеграл Лебега : практическое пособие / Г. Н. Казимиров, С. М. Горский ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 39 с.

ISBN 978-985-577-359-8

Предлагаемое практическое пособие предназначено для помощи студентам в подготовке к экзамену по разделу курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения». В нем рассматривается подробно понятие меры, продолжения меры, интеграла Лебега, заряда.

Издание содержит как лекционный материал, так и практические задания.

УДК 517. 9 (075.8)
ББК 22.16 я73

ISBN 978-985-577-359-8

Оглавление

Предисловие

Практическое пособие написано применительно к действующей учебной программе. Теория меры и интеграла Лебега излагается в университете, начиная с 3-го семестра у студентов специальности «Прикладная математика» и начиная с 3-го курса у студентов специальности «Математика».

Понятие меры множества является естественным обобщением понятий: длины отрезка, площади плоской фигуры, объёма тела и т. п. Это понятие возникло в теории функций действительного переменного, а оттуда перешло в теорию вероятностей, теорию динамических систем, функциональный анализ и многие другие области математики.

Понятие интеграла Римана, известное из курса математического анализа, применимо лишь к функциям, которые или непрерывны или имеют «не слишком много» точек разрыва. Для функций, которые могут быть разрывны всюду, например, функции Дирихле, римановская конструкция интеграла становится непригодной. Основная идея построения интеграла Лебега состоит в том, что здесь, в отличие от интеграла Римана, точки x группируются не по признаку их близости на оси x, а по признаку близости значений функции в этих точках. Это сразу позволяет распространить понятие интеграла на весьма широкий класс функций.

Издание содержит как лекционный материал, так и практические задания, расположенные в порядке возрастания степени сложности.

Издание предназначено для организации учебного процесса дневного отделения математического факультета по специальностям 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)» и 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». Также издание может быть использовано при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий студентам разных форм обучения.

1. Понятие меры

1.1. Системы множеств

Пусть X – произвольное множество, $P(X)$ – множество всех подмножеств множества X.

Определение 1. Система $K \subset P(X)$ называется *кольцом*, если:

1) $K \neq \varnothing$;

2) $\forall A, B \in K, \quad A \cup B \in K, \quad A \setminus B \in K.$

Замечание: вместо пары $(\cup, \setminus)$ можно использовать $(\cup, \triangle)$ или $(\setminus, \triangle)$, где $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример 1. $K = \{\varnothing\}$ – кольцо, $K = P(X)$ – кольцо.

Утверждение 1. Если K – кольцо и A, B – его элементы, то $A \cap B \in K$.

$\lhd$ $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B) = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \in K,$ или $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ $\rhd$

Определение 2. Для $A \subset P(X)$ наименьшее из колец, содержащих A (содержится в любом кольце, содержащем A), называется *кольцом, порождённым* A, и обозначается $K(A)$.

Утверждение 2. Кольцо, порождённое системой A, существует и единственно.

$\lhd$ $K(A) = \bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha \quad (K_\alpha \supset A)$. $K(A)$ содержится в любом кольце, содержащем A, $K(A) \neq \varnothing$, так как $\varnothing \in K_\alpha \quad \forall \alpha$. Если $A, B \in K(A)$, то $A, B \in K_\alpha \ \forall \alpha$ и поскольку K_α – кольцо $\forall \alpha$, то $A \cup B \in K_\alpha \ \forall \alpha$ и, следовательно, $A \cup B \in \bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha = K(A)$ (для $\setminus$ – аналогично). По определению K(A) является кольцом.$\rhd$

Определение 3. $S \subset P(X)$ называется *полукольцом*, если:

1) $\varnothing \in S$,

2) $\forall A, B \in S \quad A \cap B \in S$,

3) $\forall A, B \in S \quad A \subset B \Rightarrow B \setminus A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in S$ и $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$.

Запись $A \sqcup B$ означает $A \cup B$, где $A \cap B = \varnothing$.

Пример 2. Любое кольцо является полукольцом, так как для любого кольца K $\varnothing \in K (\varnothing = A \setminus A)$.

Пример 3. $S=\{[a;b)\mid a\le b, a\in R, b\in R\}$ – полукольцо, $[a;a)=\varnothing$, а свойства 2, 3 очевидны, если рассмотреть все возможные случаи расположения двух элементов из S.

Пример 4. $S=\{[a_1,b_1)\times\ldots\times[a_n,b_n)\mid \quad a_i\le b_i \quad \forall i=\overline{1,n}, \quad a_i,b_i\in R\}$.

Лемма 1. Если S – полукольцо, $A\in S$, $B=\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i, B_i\in S$, то $A\setminus B=\bigsqcup\limits_{i=1}^{p} A_i$, где $\forall A_i\in S$.

$\lhd$ Воспользуемся индукцией по n:

1) $n=1$, $B=B_1$, $A\setminus B=A\setminus B_1=A\setminus(A\cap B_1)$ – выполняется;

2) предположим, лемма верна для $n=k-1$; рассмотрим её для $n=k$: $B=\bigsqcup\limits_{i=1}^{k} B_i$, $A\setminus\bigsqcup\limits_{i=1}^{k} B_i=\left(A\setminus\bigsqcup\limits_{i=1}^{k-1} B_i\right)\setminus B_k=\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{p} A_i\right)\setminus B_k=\bigsqcup\limits_{i=1}^{p} A_i\setminus B_k =$

$=\bigsqcup\limits_{i=1}^{p} A_i\setminus\ A_i\cap B_k\ =\bigsqcup\limits_{i=1}^{p}\left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{n(A_i)} A_{ij}\right)\rhd$

Теорема 1. Пусть S – полукольцо, $K(S)$ – кольцо, порождённое S. Тогда $K(S)=\left\{\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \mid \quad n\in N, \quad A_i\in S\right\}$.

$\lhd$ Очевидно $S\subset K(S)$. Докажем, что $K(S)$ – кольцо. $K(S)\ne\varnothing$, так как $\varnothing\in S\Rightarrow\varnothing\in K(S)$.

Пусть

$$A,B\in K(S),\quad A=\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k,\quad B=\bigsqcup_{i=1}^{m} B_i,\quad A_k,B_i\in S,\forall k=1,\ldots,n,\forall i=1,\ldots,m.$$

В силу леммы

$$A\cup B=(A\setminus B)\sqcup B=\left(\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right)\setminus B\right)\sqcup B=\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\setminus B\right)\sqcup B=\bigsqcup_{k=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{n_k} A_{kj}\left(\bigsqcup_{i=1}^{m} B_k\right)\in K(S)$$

и $A\setminus B=\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)\setminus\bigsqcup\limits_{i=1}^{m} B_i=\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}\bigsqcup\limits_{j=1}^{p_k} A_{kj}\in S$. Итак, $K(S)$ – кольцо.$\rhd$

Определение 4. Кольцо K называется σ-*кольцом*, если $\forall A_1,\ldots A_n,\ldots\in K \quad \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\in K$.

Определение 5. Кольцо K называется δ-*кольцом*, если $\forall A_1,\ldots A_n,\ldots\in K \quad \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\in K$.

Определение 6. Пусть $A \subset P(X)$. Наименьшее σ-кольцо, содержащее A, называется *σ-кольцом, порождённым A*.

Определение 7. Кольцо $K \subset P(X)$ называется *алгеброй*, если $X \in K$.

Определение 8. Система подмножеств $R \subset P(X)$ называется *σ-алгеброй*, если:

1) R – алгебра;
2) R – σ-кольцо.

Определение 9. Система подмножеств $R \subset P(X)$ называется *δ-алгеброй*, если:

1) R – алгебра;
2) R – δ-кольцо.

Пример 5. $P(X)$ является σ-алгеброй и δ-алгеброй.

Всякая σ-алгебра является δ-алгеброй.

Пример 6. Рассмотрим τ-систему интервалов прямой и их счётных объединений (естественная топология на прямой). σ-кольцо, порождённое τ, называют *σ-алгеброй борелевских множеств* и обозначают $B(\tau)$.

1.2. Понятие меры

Определение 10. Пусть S – полукольцо. Функция $\mu : S \to [0,+\infty]$ (тождественно не равная $+\infty$) называется *мерой* на полукольце S, если она неотрицательна и аддитивна, то есть

1) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in S$;
2) для $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \quad A, A_1, \ldots, A_k \in S$.

При этом число $\mu(A)$ называется *мерой множества A*.

Определение 11. Меру μ, определённую на полукольце S, называют *σ-аддитивной* (или *счётно-аддитивной*), если

$$\mu\ A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad \forall A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где} \quad A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in S.$$

Определение 12. Пусть μ – мера на полукольце S, μ_1 – мера на полукольце S_1. μ_1 называют *продолжением меры μ* на S_1, если:

1) $S \subset S_1$;
2) $\mu_1(A) = \mu(A) \quad \forall A \in S$.

Теорема 2. Пусть μ – мера на полукольце S, тогда $\exists!$ продолжение меры на кольцо $K(S)$.

$\lhd$Пусть $A \in K(S) \Rightarrow$ (Теорема 1) $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in S, k = 1,\dots,n.$

Пусть $\mu_1(A) := \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

1) Докажем, что $\mu_1(A)$ не зависит от представления A. Пусть ещё $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} B_i$, $B_i \in S$, $i = 1,\dots,m$. Рассмотрим множество $C_{ki} = A_k \cap B_i$.

Тогда $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} C_{ki}$, $B_i = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_{ki}$, $\mu(A_k) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(C_{ki})$, $\mu(B_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(C_{ki})$

$\sum\limits_{i=1}^{m} \mu(B_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(C_{ki}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(C_{ki}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu_1(A)$. Итак, $\mu_1(A)$ не зависит от представления A.

2) Очевидно, $\mu_1(A)$ неотрицательна и $\mu_1(A) = \mu(A)$, если $A \in S$.

3) Докажем, что μ_1 аддитивна. Пусть $A, A_1, \dots, A_n \in K(S)$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Тогда $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n(A_k)} B_{ki}$, $B_{ki} \in S$, $\mu_1(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n(A_k)} \mu(B_{ki}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_1(A_k)$.

Аддитивность доказана.

4) Докажем единственность μ_1. Пусть μ_2 – ещё одно продолжение μ. Тогда $\forall A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in S$, $k = 1,\dots,n$ выполняется $\mu_2(A) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_2(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu_1(A)$.

Итак, μ_1 – продолжение μ на $K(S)$. $\rhd$.

Замечание. Можно доказать, что если в условии теоремы μ – σ-аддитивна, то и μ_1 – σ-аддитивна.

1.3 Свойства меры

Пусть μ_1 – продолжение μ на $K(S)$

1. Если μ – мера на полукольце S и $A, B \in S : A \subset B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$.

$\lhd$ $B = A \sqcup (B \setminus A)$, по свойству аддитивности $\mu_1(B) = \mu_1(A) + \mu_1(B \setminus A) \Rightarrow \mu_1(B) \ge \mu_1(A)$. Так как на S μ_1 и μ совпадают, то $\mu(B) \ge \mu(A)$ $\rhd$

2. Если μ – мера на полукольце S и $C_1 \ldots C_n, \ldots \in S$, причём $C \supset \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, тогда $\mu(C) \ge \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$.

$\lhd$ Так как $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i \subset C$, то $\mu_1\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i\right) \le \mu_1(C)$. В силу аддитивности $\mu_1 \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_1(C_i) \le \mu_1(C) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(C_i) \le \mu(C), \quad \forall n \in N$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \le \mu(C)$ $\rhd$

3. Если μ – мера на полукольце S и $C_1 \ldots C_n \in S$, причём $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$, тогда $\mu(C) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(C_i)$.

$\lhd$ Так как $C = (C \cap C_1) \sqcup ((C \setminus C_1) \cap C_2) \sqcup \ldots \sqcup \left(\left(C \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} C_i\right) \cap C_n\right)$, то $\mu(\mathrm{C}) = \mu_1(C) = \mu_1(C \cap C_1) + \mu_1((C \setminus C_1) \cap C_2) + \ldots + \mu_1\left(\left(C \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} C_i\right) \cap C_n\right) \le$
$\le \mu_1(C_1) + \mu_1(C_2) + \ldots + \mu_1(C_n) = \mu(C_1) + \mu(C_2) + \ldots + \mu(C_n)$ $\rhd$

4. μ – σ-аддитивная мера на полукольце S

$$\Longleftrightarrow \forall C, \quad C_1, C_2 \ldots \in S : C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \quad \mu(C) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \qquad (1.1)$$

$\lhd$<u>Необходимость.</u> Пусть μ – σ-аддитивна на S. Поскольку $C = (C \cap C_1) \sqcup ((C \setminus C_1) \cap C_2) \sqcup \ldots \sqcup \left(\left(C \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i\right) \cap C_n\right) \sqcup \ldots$ и μ_1 – σ-аддитивна (смотри замечание к теореме 2), то $\Rightarrow \mu(\mathrm{C}) = \mu_1(C) = \mu_1(C \cap C_1) + \mu_1((C \setminus C_1) \cap C_2) + \ldots + \mu\left(\left(C \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} C_i\right) \cap C_n\right) + \ldots \le$
$\le \mu_1(C_1) + \mu_1(C_2) + \ldots + \mu(C_n) + \ldots = \mu(C_1) + \mu(C_2) + \ldots + \mu(C_n) + \ldots$(сумма ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$ может быть равна $+\infty$).

<u>Достаточность</u>: Пусть выполнено условие (1). Докажем, что μ – σ-аддитивна. Пусть $A_1, A_2, \ldots \in S : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогда $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$ и по свойству 2 $\mu(A) \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, но по условию 1 $\mu(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, так как $A \subset \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Поэтому $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \rhd$

5. (Непрерывность меры). Пусть μ – σ-аддитивная мера на полукольце S, $E_1, E_2, \ldots \in S$, последовательность $\{E_n\}$ – неубывающая $(E_1 \subset E_2 \subset \ldots)$ и $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, тогда $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

$\lhd\, E = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_3 \setminus E_2) \sqcup \ldots \quad \mu(E) = \mu_1(E) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \mu_1(E_n \setminus E_{n-1}) + \mu(E_1)$.

Если $A \subset B, A, B \in K$ и μ – мера на кольце K, то $\mu(B) = \mu((B \setminus A) \sqcup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
Поэтому $\mu_1(E_n \setminus E_{n-1}) = \mu_1(E_n) - \mu_1(E_{n-1})$. И, следовательно,

$$\mu(E) = \mu(E_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} (\mu(E_k) - \mu(E_{k-1})) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \rhd$$

6. Пусть μ – σ-аддитивная мера на полукольце S, и пусть $\{E_n\}$ $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$, $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_1, E_2, \ldots \in S$, и мера одного из множеств E_k конечна. Тогда $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty}(E_n)$.

$\lhd$Рассмотрим последовательность $\{E_1 \setminus E_n\}$.

$E_1 \setminus E_2 \subset E_1 \setminus E_3 \subset \ldots \subset E_1 \setminus E_n \subset \ldots$, $\quad E_1 \setminus E = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} (E_1 \setminus E_n)$. По свойству 5 $\mu_1(E_1 \setminus E) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_1(E_1 \setminus E_n)$.

Или $\mu_1(E_1 \setminus E) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_1(E_1 \setminus E_n)$, $\quad \mu_1(E_1) - \mu_1(E) =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} (\mu_1(E_1) - \mu_1(E_n)) \Rightarrow \mu_1(E) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_1(E_n) \rhd$

Пример 7. Рассмотрим полукольцо

$S = \{[a;b) \mid a, b \in R \;\; a \leq b\}$, $\mu([a;b)) = b - a$.

μ является мерой на полукольце S. Эту меру называют *мерой Лебега на прямой*.

Теорема 3. Мера Лебега на прямой является σ-аддитивной.

$\triangleleft$ Пусть $[a;b)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\subset[a;b)$. По свойству 2 меры $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu([a_k,b_k))\le\mu([a;b))$. Докажем обратное неравенство. Пусть $\varepsilon>0$ и $B=\left[a;b-\dfrac{\varepsilon}{2}\right]$, $B_k=\left(a_k-\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}};b_k\right)$. Тогда

$$\left(a;b-\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset B\subset[a;b)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k.$$

По лемме Бореля (см. [4], с. 329), если отрезок покрыт бесконечной системой открытых множеств, то из этой системы можно выделить конечную подсистему, которая также покрывает этот отрезок. Поэтому

$\exists B_{k_1},\ldots,B_{k_n}:B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_{k_i}$, и в силу свойств 1 и 3

$$\mu\left(\left[a;b-\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)\le\sum_{i=1}^{n}\mu\left(\left[a_{k_i}-\frac{\varepsilon}{2^{k_i+1}};b_{k_i}\right)\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(\left[a_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},b_k\right)\right),\text{ или}$$

$$b-\frac{\varepsilon}{2}-a\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k-a_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right),\quad b-a\le\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)+\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow.$$

$$\Rightarrow\mu([a;b))\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu([a_k;b_k))+\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0+0$, получим $\mu([a;b))\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu([a_k,b_k))$ $\triangleright$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое «кольцо» и «полукольцо»?
2. Какие системы множеств вы знаете?
3. Что такое мера?
4. Какая мера называется σ-аддитивной?
5. Какими свойствами обладает мера?
6. Как определяется мера Лебега на прямой?

Задачи

1. Образуют ли следующие системы множеств полукольцо, кольцо, σ-кольцо, δ-кольцо, алгебру, σ-алгебру, δ-алгебру?

а) $R = \ 0,\ a;b\ ,\ a\ ,\ b\ \ ,$

б) $R = \ \ a;+\infty\ \ |\, a \in R\ ,$

в) $R = \ A \,|\, A -$ *замкнутое* множество *в* R ,

г) $R = \ \ a,b\ |\, a \le b, a, b \in R\ .$

Пример решения задачи

Пусть $R = \ A|A -$ *открыто в* R .

$\varnothing$ считается открытым, следовательно, $\varnothing \in R$.

Пусть $A, B \in R$. Рассмотрим $A \cap B$. Пусть $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$. Так как A и B открыты, то $\exists \delta_1 > 0 :\ x - \delta_1, x + \delta_1\ \subset A$ и $\exists \delta_2 > 0 :\ x - \delta_2, x + \delta_2\ \subset B$.

Взяв $\delta = \min\ \delta_1, \delta_2\ $, получим, что $\ x - \delta, x + \delta\ \subset A \cap B$. Следовательно, $A \cap B$ – открыто, то есть $\in R$.

Рассмотрим $A = \ 0; 2\ \in R$ и $B = \ 0; 3\ \in R$. Тогда $B\backslash A$ = [2; 3). Предположим, что $B \setminus A = A_1$ т A_2 т … т A_n, где $A_1, A_2, \ldots, A_n \in R$, то есть открыты. Тогда $B \setminus A$ открыто (так как если $x \in B \setminus A$, то $\exists A_{i_0} : x \in A_{i_0}$, то есть при некотором $\delta > 0\ \ x - \delta, x + \delta\ \subset A_{i_0} \subset B \setminus A$), что неверно, так как у$\delta > 0 :\ 2 - \delta, 2 + \delta\ \subset B \setminus A$.

Следовательно, предположение неверно и R не является полукольцом. Так как любое кольцо является полукольцом, то R не является кольцом, а следовательно, и σ-кольцом, δ-кольцом, алгеброй, σ-алгеброй и δ-алгеброй (поскольку все они кольца).

2. Задайте меру на *P (X)* для *X*={*a; b*} (если это возможно), так, чтобы

а) $m(\{a\}) = -1$;
б) $m(\{b\}) = 2$, $m(\{a, b\}) = 5$;
в) $m(\{a\}) = 4$, $m(\{a, b\}) = 5$;
г) $m(\varnothing) = 0$.

3. Пусть m – мера на кольце R. $E, F \in R$ и $m\ F\ < +\infty$, $m\ E\ < +\infty$. Доказать, что

а) $m\ E \setminus F\ = m\ E\ - m\ E \cap F\ $;

б) $m\ \varnothing\ = 0$;

в) $m\ E \cup F\ = m\ E\ + m\ F\ - m\ E \cap F\ $.

2. Лебегово продолжение меры

2.1. Понятие внешней меры и ее свойства

Определение 1. Пусть m – мера, определенная на полукольце S подмножеств множества X, и пусть $A \subset X$. *Внешней мерой* множества A будем называть число равное $\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \middle|\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in S\right\}$, если A покрывается не более, чем счетным числом элементов полукольца. В противном случае, будем считать внешнюю меру A равной $+\infty$. Внешняя мера множества A обозначается $\mu^*(A)$.

Замечание. Если в определении внешней меры все ряды расходятся, то будем считать, что $\mu^*(A) = +\infty$.

Свойства внешней меры

1. $\mu^* : P(X) \to [0;+\infty]$ (включая $+\infty$)

$\lhd$ Очевидно $\rhd$

2. Счетная полуаддитивность.

Пусть $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A \subset X, A_k \subset X\ \forall\, k \in N$. Тогда $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

$\lhd$ Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу определений внешней меры и точной нижней грани $\forall\, k \in N\ \exists\, B_{ki} \in S, i \in N : A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{ki}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} m(B_{ki}) < \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда $A \subset \bigcup_{k,i=1}^{\infty} B_{ki}$, и поэтому $\mu^*(A) \le \sum_{k,i=1}^{\infty} m(B_{k_i}) \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+0$, получим требуемое неравенство. $\rhd$

3. Монотонность.

Если $A \subset B, A, B \subset X$, то $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

$\lhd$Поскольку $A \subset B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, то $\left\{\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \middle|\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in S\right\} \supset$ $\supset \left\{\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \middle|\ B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,\ B_k \in S\right\}$. И так как у более широкого числового множества точная нижняя грань может быть не больше, чем у более узкого, то в силу определения внешней меры свойство 3 доказано.$\triangleright$

4. Если $A \in S$, то $\mu^*(A) = m(A)$.

$\triangleleft$Так как $A \subset A$, то по определениям внешней меры и точной нижней грани $\mu^*(A) \le m(A)$. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Поскольку m – σ-аддитивна, то по свойству 4 меры $m(A) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ и $\Rightarrow m(A) \le \mu^*(A)$. Учитывая ранее полученное неравенство, имеем $m(A) = \mu^*(A)$ $\triangleright$

Замечание. Из доказанных свойств $\Rightarrow$, что внешняя мера является мерой на полукольце S, но, вообще говоря, она не является мерой на $P(X)$.

Пример 1. Пусть m – мера Лебега на R, то есть $m([a;b)) = b - a$. Найдем $\mu^*([0;1])$. По свойству 3 внешней меры имеем $[0;1) \subset [0;1] \subset \left[0;1+\dfrac{1}{n}\right) \Rightarrow \mu^*([0;1)) \le \mu^*([0;1]) \le \mu^*\left(\left[0;1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$. И на основании свойств 3 и 4 внешней меры $m([0;1)) \le \mu^*([0;1]) \le m\left(\left[0;1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ или $1 \le \mu^*([0;1]) \le 1 + \dfrac{1}{n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\mu^*([0;1]) = 1$.

Пример 2. Если B – конечное или счетное, то $\mu^*(B) = 0$.

Найдём сначала внешнюю меру одноточечного множества $\{b\}$, где $b \in \mathrm{R}$. Поскольку $\{b\} \subset \left[b, b+\dfrac{1}{n}\right)$, то по свойству монотонности внешней меры $\mu(\{b\}) \le \mu^*\left(\left[b, b+\dfrac{1}{n}\right)\right) = m\left[b, b+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\mu^*(\{b\}) \le 0 \Rightarrow \mu^*(\{b\}) = 0$.

То, что $\mu^*(B) = 0 \Rightarrow$ из свойства счётной полуаддитивности внешней меры, поскольку $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{b_k\}$, где $\{b_k\}$ – занумерованная последовательность элементов из B.

2.2. Измеримые по Лебегу множества. Лебегово продолжение меры

Определение. Множество $A \subset X$ будем называть *измеримым по Лебегу*, если $\forall\, E \subset X$ выполнено $\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(E \cap (X \setminus A))$.

Обозначим систему всех измеримых по Лебегу множеств через M. Положим

$$\mu(A) = \mu^*(A)\ \forall\, A \in M \tag{2.1}$$

Теорема 1. (без доказательства)

1. M – σ-алгебра.

2. Если m – σ-аддитивная мера на S, то μ, определяемая формулой (2.1), является σ-аддитивной мерой на M (m – из определения внешней меры) (доказательство можно найти, например, в [1], с. 28– 30).

Определение. σ-аддитивная мера, определяемая формулой (2.1) на множестве M называется *лебеговым продолжением меры*.

Теорема 2. Лебегово продолжение меры – продолжение меры m. (доказательство см. в [1], с. 28– 30).

Замечание. Из теоремы 2 следует, что $S \subset M$, то есть элементы полукольца S, на котором определяется мера m, являются измеримыми по Лебегу множествами.

Пример 3. Пусть m – мера Лебега на прямой. В силу замечания к Теореме 2 $[a,b)$ измерим, так как он является элементами полукольца $S \subset M$, на котором определяется мера Лебега на прямой, и так как $[a;b] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[a, b+\frac{1}{n}\right)$, то по теореме 1 $[a,b]$ – измерим. Если μ – Лебегово продолжение меры Лебега на прямой, то в силу её σ-аддитивности, теоремы 1 , свойства 6 меры и свойства 4 внешней меры

$$\mu([a,b]) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\left[a, b+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\mu^*\left(\left[a, b+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\left[a, b+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(b + \frac{1}{n} - a\right) = b - a\ .$$

Одноточечное множество $\{b\}$ измеримо в силу теоремы 1, так как $\{b\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[b, b+\frac{1}{n}\right)$ и в силу тех же рассуждений, что и для отрезка,

$$\mu(\{b\}) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\left[b, b+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\mu^*\left(\left[b, b+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\left[b, b+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(b+\dfrac{1}{n}-b\right) = 0$. Поскольку $(a,b) = [a,b)\setminus\{a\}$, то в силу теоремы 1 (a,b) измерим, а так как $[a,b) = \{a\} \sqcup (a,b)$, то в силу аддитивности меры $\mu([a,b) = \mu(\{a\}) + \mu((a,b))$. Откуда
$\mu(a,b) = \mu([a,b)) - \mu(\{a\}) = b - a - 0 = b - a$.

В силу Теоремы 1 из измеримости интервала следует измеримость произвольного борелевского множества.

Пример 4. Пример неизмеримого множества.

На $[0;1)$ введем отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in Q$. Это отношение разбивает $[0;1)$ на непересекающиеся классы. Выберем в каждом классе по одному представителю и составим из них множество M.

Пусть $r + M = \{r + x \mid x \in M\}$. Рассмотрим все рациональные числа из $[-1;1)$. Их счетное число. Занумеровав их, получим последовательность $\{r_n\}$. Ясно, что $[0;1) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(r_k + M) \subset [-1;2)$ (*)

Предположим, что M – измеримо. Пусть $\mu(M) = 0 \Rightarrow \mu(r_k + M) = 0\ \forall\, k \in N$. В силу монотонности и σ-аддитивности меры Лебега на прямой $1 - 0 \le \mu\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(r_k + M)\right) = 0$. Получили противоречие.

Пусть $\mu(M) > 0$, тогда $\mu(M) = \mu(r_k + M)$. В силу σ-аддитивности и монотонности меры Лебега на прямой $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(r_k + M)\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(M) = +\infty \le 3$. Противоречие. Следовательно, M – неизмеримое и неборелевское.

Пример 2. Канторовское множество.

Рассмотрим $[0;1]$. Разделим его на 3 части и выбросим средний интервал $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, далее разделим каждый из оставшихся отрезков на 3 части и выбросим средний интервал. Продолжая указанный процесс до бесконечности, получим канторовское множество. Обозначим его F_0. $F_0 = [0;1]\setminus G_0$, G_0 – объединение выбрасываемых интервалов.

$$\mu(G_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k}=1\Rightarrow\mu(F_0)=1-1=0.$$

Покажем, что множество F_0 несчётно. Во множестве F_0 находятся все числа, в троичной записи которых не присутствует 1, то есть F_0 эквивалентно множеству последовательностей, состоящих из 0 и 2, а таких последовательностей несчетное число.

2.3. Мера Лебега-Стильтьеса

$S=\{[a,b)\mid a\le b,\, a,b\in R\}$ и $m_f([a,b))=f(b)-f(a)$, f – неубывающая на R. m_f называется *мерой Лебега-Стильтьеса*. Если $f(x)=x$, то это мера Лебега на прямой.

Утверждение. m_f – σ-аддитивна на $S \Leftrightarrow f$ – непрерывна слева. (см. [1], с. 35–37).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое внешняя мера и какой мерой она порождается?
2. Для каких множеств определена внешняя мера?
3. Для каких множеств внешняя мера совпадает с мерой, которой она порождается?
4. Какое множество называется измеримым по Лебегу?
5. Как и для каких множеств определяется Лебеговское продолжение меры?

Задачи

1. Пусть μ – Лебеговское продолжение меры Лебега на прямой. Доказать измеримость и найти меру множества A, если

а) A = (1; 3];

б) A = [0; $+\infty$);

в) A = ($-\infty$; 10];

г) A = $R\setminus Q$.

2. Пусть μ – Лебеговское продолжение меры Лебега-Стильтьеса с порождающей функцией *f*. Доказать измеримость и найти меру множества *A*, если

$$f\ \ x\ =\begin{cases}3, & x\le 2\\ 8, & 2<x\le\pi\\ 11, & x>\pi\end{cases}$$

а) $A = \{1; 2\}$;
б) $A = (0, 2)$;
в) $A = [1; 2]$;
г) $A = \{x\in Q \mid \sqrt{3}\le x\le\pi\}$.

3. Измеримые функции

3.1. Понятие измеримой функции. Примеры

Пусть (X, Σ, μ) – пространство с мерой, то есть на σ-алгебре Σ подмножеств множества X определена σ-аддитивная мера μ. Элементы σ-алгебры Σ будем называть измеримыми множествами.

Определение 1. Функция $f: E\to R$, определенная на измеримом множестве $E\in\Sigma$, называется *измеримой на* E, если $\underline{\{x\in E | f(x)<C\}}$ измеримо $\forall\ C\in R$.

Подчеркнутое множество равно $E\cap f^{-1}((-\infty, C))$.

Пример 1. Докажем, что функция Дирихле

$D(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\in R\setminus Q\end{cases}$ измерима на любом измеримом множестве *E*.

Пусть $A = \ \ x\in E\big|D(x)<C\ \ $. Тогда

при $C>1$ $A=E$ – измеримо,

при $C\le 0$ $A=\varnothing$ – измеримо и

при $0<C\le 1$ $A=E\cap(R\setminus Q)=E\setminus(E\cap Q)$ – измеримо (так как *E*, Q – измеримы).

Пример 2. Пусть A – неизмеримое множество и $X_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\notin A\end{cases}$. Тогда $X_A(x)$ неизмерима на любом измеримом множестве E. Действительно, при $C=\dfrac{1}{2}$ $\left\{x\in E|X_A(x)<\dfrac{1}{2}\right\}=$ $=\{x\in E\mid X_A(x)=0\}=E\setminus A$ и так как A – неизмеримо, то от противного легко показать, что и $E\setminus A$ неизмеримо.

Пример 3. Непрерывная функция измерима на любом измеримом множестве E.

Действительно, $\{x\in E\mid f(x)<C\}=E\cap f^{-1}((-\infty,C))$ – измеримо, поскольку прообраз открытого множества при непрерывном отображении открыт, т.е. является борелевским множеством, и следовательно, измеримым.

Определение 2. Функция $g{:}R\to R$ называется *борелевской*, если для любого борелевского множества B $g^{-1}(B)$ – борелевское множество.

Утверждение 1. Функция f – измерима $\Leftrightarrow$ прообраз любого борелевского множества измерим.

$\lhd$ см. [2], с. 283 $\rhd$

Очевидно, борелевская функция измерима.

Пример 4. Непрерывная функция является борелевской. Это очевидно.

Утверждение 2. Если g – борелевская, а f – измерима, то $g\circ f$ измерима. В частности, непрерывная функция от измеримой является измеримой.

$\lhd E\cap(g\circ f)^{-1}((-\infty,C))=E\cap f^{-1}(g^{-1}((-\infty,C)))\rhd$.

Теорема 1. Сумма, разность и произведение измеримых на E функций является измеримой. И если знаменатель не обращается в ноль, то и их частное – измеримая функция.

$\lhd$1) Если f – измерима и $k\neq 0$, то множества

$x\in E\big|kf(x)<C\ =\left\{x\in E\,\middle|\,f(x)<\dfrac{C}{k}\right\}$ и

$x\in E\big|a+f(x)<C\ =\ x\in E\big|f(x)<C-a$ измеримы, и следовательно, измеримы функции kf, $f+a$, $k,a=\mathrm{const}$.

2) Если f и g измеримые, тогда $\{x\in E\mid f(x)>g(x)\}$ – измеримо. Действительно, множество

$\{x\in E\mid f(x)>g(x)\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x\in E\mid f(x)>r_k\}\cap\{x\mid g(x)<r_k\}$, где объединение берется по всем рациональным числам, занумерованным в произвольном порядке, измеримо, так как

$\{x \in E \mid f(x) > C\} = E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in E \middle| f(x) < C + \frac{1}{k} \right\}$ измеримо. Отсюда в силу пункта 1) получаем, что $\{x \in E \mid f(x) + g(x) < C\} = \{x \in E \mid -f(x) + C > g(x)\}$ измеримо, то есть сумма измеримых функций измерима.

3) Измеримость разности следует и 1) и 2).

4) Для доказательства измеримости произведения измеримых функций, воспользуемся равенством $fg = \frac{1}{4}\ (f+g)^2 - (f-g)^2$. Стоящее справа выражение есть измеримая функция. Это вытекает из 1– 3 и из утверждения 2.

5) Если $f(x)$ измерима и $f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ измерима. Действительно,

если $C > 0$, то $\left\{ x \in E \middle| \frac{1}{f(x)} < C \right\} = \left\{ x \in E \middle| f(x) > \frac{1}{C} \right\} \cup\ x \in E \mid f(x) < 0$,

если $C < 0$, то $\left\{ x \in E \middle| \frac{1}{f(x)} < C \right\} = \left\{ x \in E \middle| 0 > f(x) > \frac{1}{C} \right\}$, а

если $C = 0$, то $\left\{ x \in E \middle| \frac{1}{f(x)} < C \right\} =\ x \in E \mid f(x) < 0$. Каждый раз справа мы получаем измеримое множество. Из 4) и 5) получим, что частное измеримых множеств измеримо.$\rhd$.

Теорема 2. Если последовательность $\{f_n(x)\}: f_n(x)$ – измерима на $E\ \forall\, n \in N$ и $f_n \xrightarrow{E} f$ (то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall\, x \in E$), тогда f – измерима на E .

$\lhd$ Пусть $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Тогда

$$\{x \in E \mid f(x) < C\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \left\{ x \in E \mid f_m(x) < C - \frac{1}{k} \right\} \tag{3.1}$$

Действительно, если $f(x) < C$, то $\exists\, k : f(x) < C - \frac{2}{k}$; далее, при этом k можно найти столь большое n, что при всех $m > n$ выполнено $f_m(x) < C - \frac{1}{k}$, а это означает, что x войдет в правую часть (3.1).

Обратно, если x принадлежит правой части равенства (1), то $\exists\, k$ и $\exists\, n$ такие, что при всех $m > n$ выполнено $f_m(x) < C - \frac{1}{k}$, но тогда $f(x) < C$.

Поскольку $f_m(x)$ измеримы на Е, то $\left\{x \in E \mid f_m(x) < C - \frac{1}{k}\right\}$ измеримо. Так как совокупность измеримых множеств есть σ-алгебра, то правая часть (1) – измеримое множество, а значит $f(x)$ – измерима.$\triangleright$

Определение 3. Мера μ, определенная на полукольце S, называется *полной*, если из того, что $E \in S, \mu(E) = 0$ и $F \subset E \Rightarrow F \in S$ и $\mu(F) = 0$.

Утверждение 3. Лебеговское продолжение меры на M является полной мерой.

$\triangleleft$ По свойству монотонности внешней меры $\mu^*(F) \le \mu^*(E) = 0 \Rightarrow \mu^*(F) = 0$. В силу счётной полуаддитивности и монотонности внешней меры имеем

$\forall A \in X \quad \mu^*(A) \le \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap X \setminus F)$ и

$\mu^*(A) \ge \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap X \setminus F)$ Отсюда и следует, что $F \in M$, то есть измеримо.$\triangleright$

В дальнейшем будем считать, что (X, Σ, μ) пространство с полной мерой.

Пусть $P(x)$ – свойство, которым могут обладать или не обладать элементы множества. Будем говорить, что свойство $P(x)$ выполняется почти всюду (п. в.) на Е, если множество тех $x \in E$, где оно не выполняется, имеет меру 0.

Пример 5. $f = g$ п. в. на Е, если $\mu(\{x \in E | f(x) \ne g(x)\}) = 0$.

Определение 4. Функции, равные п.в. на E, называются *эквивалентными* на E.

Теорема 3. Пусть E – измеримо и $f = g$ п.в. на E, тогда f и g измеримы или неизмеримы на Е одновременно.

$\triangleleft$ Из определения равенства п.в. следует, что $\{x \mid f(x) < C\}$ и $\{x \mid g(x) < C\}$ отличаются друг от друга только на некоторое множество меры 0, следовательно (поскольку мера предполагается полной), если измеримо одно из них, то измеримо и второе. А если одно из них неизмеримо, то неизмеримо и второе (от противного).$\triangleright$

Теорема 4. Если последовательность измеримых на E функций сходится п.в. на E к f, то f – измерима на E.

Теорема 4 также, как и теорема 3, следует из полноты меры.

Теорема 5 (Егорова). Пусть последовательность f_n измеримых на E функций сходится п.в. на E к функции f, тогда $\forall\, \delta > 0\, \exists\, E_\delta \subset E$:

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) f_n равномерно сходится на E_δ.

$\triangleleft$ см. [1], с. 287–288. $\triangleright$

Определение 5. Будем говорить, что последовательность f_n измеримых на E функций сходится к измеримой функции f *по мере*, если $\forall\, \delta > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\, \{x \in E \,|\, |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} = 0$.

Теорема 6. Если последовательность измеримых на E функций сходится п.в. на E, то она сходится и по мере на E.

$\triangleleft$ Из теоремы 4 следует, что f – измерима. Пусть $A = \{x \in E \,|\, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$. Пусть

$$E_k(\delta) = \{x \in E \,|\, |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\},\ R_n(\delta) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta),\ M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\delta).$$

Ясно, что все эти множества измеримы. Так как $R_1(\delta) \supset R_2(\delta) \supset \ldots$, то в силу непрерывности меры $\mu(R_n(\delta)) \to \mu(M)$, при $n \to \infty$.

Проверим теперь, что $M \subset A$. Если $x_0 \in M$ и $x_0 \notin A$, то для данного $\delta > 0$ $\exists\, n : |f_k(x_0) - f(x_0)| < \delta,\ \forall\, k \geq n$, то есть $x_0 \notin R_n(\delta)$ и, тем более, $x_0 \notin M$. Противоречие. Но $\mu(A) = 0$ и $M \subset A \Rightarrow \mu(M) = 0$ и $\Rightarrow \mu(R_n(\delta)) \to 0$, при $n \to \infty$. Так как $E_n(\delta) \subset R_n(\delta)$, то теорема доказана. $\triangleright$

Пример 6 (Рисса). Последовательность f_n^k, где $f_n^k = X_{\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]}$, $k = \overline{1,n}$, $n = 1,2,\ldots$ сходится по мере на $[0,1]$ к функции $f \equiv 0$, так как $\mu\left(x \in [0,1] \,\middle|\, f_n^k(x) \geq \sigma\right) \leq \dfrac{1}{n}$ $\forall \sigma > 0$, но не сходится к $f \equiv 0$ ни в одной точке этого отрезка, так как если $x_0 \in [0,1]$, то $\forall n_0\, \exists n > n_0$ и $\exists k = 1,\ldots,n : f_n^k(x_0) = 1$.

Теорема 7. Если последовательность $\{f_n\}$, измеримых на E функций сходится по мере к f, измеримой на E, то $\exists\{f_{n_k}\} : f_{n_k} \longrightarrow f$ п.в. на E.

$\triangleleft$ см. [1], стр. 290. $\triangleright$

Теорема 8 (Лузина). f – измерима на $[a,b] \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ непрерывная функция $\varphi : \mu(\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$.

$\lhd$ см. [3], с. 98–99. $\rhd$

Таким образом, из равномерной сходимости следуют сходимость, сходимость по мере, сходимость п.в.

Из сходимости следуют сходимость п.в. и сходимость по мере.

Из сходимости п.в. следует сходимость по мере. Итак, сходимость по мере самая слабая.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется измеримой?
2. Какие измеримые функции вы знаете?
3. Назовите свойства измеримых функций.
4. Когда говорят, что некоторое свойство выполняется почти всюду?

Задачи

1. Доказать измеримость следующих функций, заданных на E:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 5 \\ 2, & x < -3 \\ 3, & -3 \le x \le 5 \end{cases}$, E = [-10; 10];

б) $f(x) = \operatorname{sign} x$, E = [-1; 1];

в) $f(x) = |x|$, $E = R$;

г) $f(x)$ – возрастающая на $E = R$.

2. Каким соотношением $(\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow)$ связаны следующие утверждения?

а) (f – измерима на E) и ($\forall c \in R \to \{x \in E \mid f(x) \le C\}$ – измеримо);

б) (f – измерима на E) и ($f^*(x) = \max(f(x), 0)$ – измерима на E);

в) (f – измерима на E) и $|f|$ – измерима на E);

г) (f – измерима на E) и $\inf(f, g) = \min(f(x), g(x))$ – измерима на E).

4. Интеграл Лебега

4.1. Понятие интеграла Лебега от простой функции

Пусть $\{X, \Sigma, \mu\}$ – пространство с полной мерой.

Определение 1. Функцию h будем называть простой на множестве $E \in \Sigma$, если h измерима на E и принимает конечное число различных значений.

Утверждение 1. Если h и g простые на E, то $h \pm g$, hg – простые на E; если $g(x) \neq 0, \forall x \in E$, то $\dfrac{h}{g}$ – простая на E.

$\lhd$Например, для $\dfrac{h}{g}$. Пусть $h = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}, g = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \chi_{A_j}$. Тогда $\dfrac{h}{g} = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{b_j} \chi_{C_{ij}}$, где $C_{ij} = E_i \cap A_j$ $\rhd$.

Определение 2. Пусть h простая на E функция, $\{a_1, ..., a_n\}$ – множество ее значений и $E_i = \{x \in E \mid h(x) = a_i\}$. Число $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$ – (конечное или $= +\infty$) будем называть интегралом Лебега от функции h по множеству E и обозначать: $\int\limits_E h d\mu$ или $\int\limits_E h(x) d\mu(x)$.

Замечание. В дальнейшем будем считать $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$. $0(+\infty) = 0$.

Пример 1. Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, \, x \in Q \\ 0, \, x \in R \setminus Q \end{cases}$ – простая на R.

$$\int\limits_{[0,1]} D(x) d\mu(x) = 1 \cdot \mu(Q \cap [0,1]) + 0 \cdot \mu([0,1] \setminus Q) = 0.$$

4.2. Понятие интеграла Лебега от неотрицательной функции

Определение 3. Пусть f – измерима на E и неотрицательна (то есть $\forall x \in E, f(x) \geq 0$). Тогда интегралом Лебега от функции f по множеству E называется число (конечное или $+\infty$).

$$\sup\left\{ \int\limits_E h d\mu \mid h - \text{простая на } E \text{ и } h \le f \text{ на } E \right\}.$$

Если множество, у которого берется точная верхняя грань, не ограничено сверху или один из интегралов от простой функции равен $+\infty$, то будем считать, что точная верхняя грань равна $+\infty$.

Свойства интеграла от неотрицательной функции

1. Если функции f и g равны п.в на E, то $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E g d\mu$, ($f, g$ – неотрицательны).

⊲ Если f и g просты на E, то, очевидно, свойство выполнено (ввиду того, что множество, на котором у f и g различные значения, имеет меру 0; тогда и сумма, стоящая в определении интеграла Лебега от простой функции, будет одна и та же).

Пусть h – простая на $E: h(x) \le f(x), \forall x \in E$. Полагая ее равной 0 на $A = \{x \in E \mid f(x) \ne g(x)\}$ $(\mu(A) = 0)$, мы получим простую функцию h_1, равную h п.в. на $E: h_1(x) \le g(x), \forall x \in E$. Ввиду сказанного выше, $\int\limits_E h(x)\, d\mu = \int\limits_E h_1(x)\, d\mu$. Поэтому множества, у которых берётся точная верхняя грань из определения интеграла Лебега от неотрицательной функции для f и g, будут равны.⊳

2. Если $f \ge 0$ и $g \ge 0$, $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in E$, то $\int\limits_E f d\mu \le \int\limits_E g d\mu$.

⊲ Это свойство сразу следует из определения интеграла Лебега от неотрицательной функции и того, что при расширении числового множества точная верхняя грань может лишь увеличиться. ⊳

3. Пусть f – неотрицательная на E функция и $k \in \mathrm{R}, k \ge 0$. Тогда $\int\limits_E k f d\mu = k \int\limits_E f d\mu$.

⊲ Это свойство очевидно для простых функций и с учётом этого для произвольных неотрицательных оно следует из определения.⊳

4. Отображение $F \to \int\limits_F f d\mu, f \ge 0$ представляет собой σ-аддитивную меру на σ-кольце $\Sigma_E = \{F \subset E \mid F \in \Sigma, \text{то есть } F - \text{измеримо}\}$.

⊲ [3], с. 152–153⊳

5. Если $f, g \ge 0$ на E, то $\int\limits_E (f+g) d\mu = \int\limits_E f d\mu + \int\limits_E g d\mu$

⊲ [3], с. 157⊳

6. Пусть $\{f_n\}$ – последовательность измеримых функций на E, такая, что $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots$, $\forall x \in E$ и $f_n \to f$ (на E). Тогда $\int\limits_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu$

$\lhd$ [3], с. 156 $\rhd$

7. Неравенство Чебышева.

Пусть $f \ge 0, C > 0$. Тогда $\mu\{x \in E \mid f(x) \ge C\} \le \frac{1}{C} \int\limits_E f d\mu$.

$\lhd$Пусть $A = \{x \in E \mid f(x) \ge C\}$. Тогда $f(x) \ge CX_A(x)$ $\forall\, x \in E$. В силу свойств 2 и 3 $\int\limits_E f d\mu \ge \int\limits_E CX_A d\mu = C\mu(A)$. Отсюда и следует неравенство Чебышева. $\rhd$

8. Пусть $f \ge 0$ на E. Тогда $\int\limits_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ п.в на E.

$\lhd$ 1) Необходимость. Если $\mathrm{f} = 0$ п.в. на E, то $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E 0 d\mu = 0$.

2) Достаточность. Пусть $\int\limits_E f d\mu = 0$ и

$$A = \{x \in E \mid f(x) \ne 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in E \mid f(x) \ge \frac{1}{n} \right\}$$

Тогда в силу свойства 4 меры и неравенства Чебышева $\mu(A) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{ x \in E \mid f(x) \ge \frac{1}{n} \right\} \right) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \int\limits_E f d\mu = 0$. $\rhd$

9. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега от неотрицательной функции: если $\int\limits_E f d\mu < +\infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall E_1 \subset E : \mu(E_1) < \delta_\varepsilon$ выполнено неравенство $\left| \int\limits_{E_1} f d\mu \right| < \varepsilon$.

$\lhd$ [3], с. 155–156 $\rhd$.

4.3. Интеграл Лебега от произвольной измеримой функции

Пусть f измерима на E. Положим $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$.

Очевидно $f = f^{+} - f^{-}, |f| = f^{+} + f^{-}$.

Определение 4. Функция f называется *интегрируемой* на E, если $\int\limits_E |f|\, d\mu < +\infty$, а число $\int\limits_E f^{+} d\mu - \int\limits_E f^{-} d\mu$ называется интегралом Лебега от функции f по множеству E. Если функция интегрируема, то интеграл всегда существует, так как $f^{+} \le |f|$ и $f^{-} \le |f|$.

Свойства интеграла Лебега:

1. Если $f \le g$ на E, то $\int\limits_E f d\mu \le \int\limits_E g d\mu$.

$\lhd$Поскольку $f \le g$, то $f^{+} \le g^{+}$ и $f^{-} \ge g^{-}$ и $\Rightarrow \int\limits_E f d\mu = \int\limits_E f^{+} d\mu - \int\limits_E f^{-} d\mu \le \int\limits_E g^{+} d\mu - \int\limits_E g^{-} d\mu = \int\limits_E g d\mu \rhd$

2. Если g – интегрируема на E, а f – измерима на E, $|f| \le g$ на E, то f – интегрируема на E.

$\lhd$ Очевидно $\rhd$

3. Пусть f и g интегрируемы на E. Тогда $\forall C \in R$ имеем $\int\limits_E Cf d\mu = C \int\limits_E f d\mu$ и $\int\limits_E (f + g) d\mu = \int\limits_E f d\mu + \int\limits_E g d\mu$.

$\lhd$[3], с. 157$\rhd$.

4. Счётная аддитивность интеграла Лебега:

Пусть f интегрируема на E и $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, E_n – измеримые множества. Тогда $\int\limits_E f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\mu$, причем ряд абсолютно сходится.

$\lhd$[3], с. 158$\rhd$.

5. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега:

Если f интегрируема на E, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \forall E_1 \subset E : \mu(E_1) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \int\limits_{E_1} f d\mu \right| < \varepsilon$.

$\lhd$ Заметим, что

$$\left|\int\limits_E f\, d\mu\right| = \left|\int\limits_E f^{+} d\mu - \int\limits_E f^{-}\, d\mu\right| \le \left|\int\limits_E f^{+}\, d\mu\right| + \left|\int\limits_E f^{-}\, d\mu\right| = \int\limits_E (f^{+} + f^{-}) d\mu = \int\limits_E |f| d\mu.$$

Ввиду аналогичного свойства для неотрицательных функций, свойство 5 доказано.$\rhd$

6. Если функция $f = 0$ п.в. на E, то $\int\limits_E f d\mu = 0$.

◁ Если $f=0$ п.в. на E, то $f^{+}=0$, $f^{-}=0$ п.в. на E (доказательство этого факта от противного). Следовательно, имеем $\int\limits_E fd\mu=\int\limits_E f^{+}d\mu-\int\limits_E f^{-}d\mu=0-0=0$ в силу аналогичного свойства для неотрицательных функций. ▷

7. Если функции f и g равны п.в. на E, то интегралы от них равны.

◁ Так как $f=g$ п.в. на Е, то $f-g=0$ п.в. на E. Тогда $\int\limits_E(f-g)d\mu=\int\limits_E fd\mu-\int\limits_E gd\mu$, а, с другой стороны, $\int\limits_E(f-g)d\mu=0$. Отсюда $\Rightarrow\int\limits_E fd\mu=\int\limits_E gd\mu$. ▷.

Это свойство позволяет распространить понятие интеграла на функции, определенные п.в. на E. Если функция определена п.в. на E, то мы её доопределим произвольным образом и считаем, что интеграл от нее равен интегралу от доопределенной функции.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется простой?
2. Как определяется интеграл Лебега от простой функции?
3. Как определяется интеграл Лебега от неотрицательной функции?
4. Какими свойствами обладает интеграл Лебега от неотрицательной функции?
5. Как определяется интеграл Лебега от произвольной измеримой функции?
6. Какими свойствами обладает интеграл Лебега от произвольной измеримой функции?

Задачи

1. Доказать, что функция h является простой на E и найти от нее интеграл:

а) $h(x)=3D(x)+4\chi_{1;2}(x)$, E = [–1; 3], μ – мера Лебега;

б) $h(x)=\mathrm{sign}\,x$, E = [–1; 1], μ – мера Лебега;

в) $h(x)=\begin{cases}1, & x>3\\ -2, & x\le 3\end{cases}$, $E=[1;5]$, μ – мера Лебега;

г) $h(x)=\begin{cases}3, & x>1\\ 4, & x\le 1\end{cases}$, $E=[0;3]$, μ – мера Лебега-Стильтьеса с порождающей функцией $F(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 2, & 0<x\le 1\\ 3, & x>1\end{cases}$.

Пример решения задачи

Дано: $h(x)=\begin{cases}1, & x<-8\\ 3, & -8\le x\le 4\\ 2, & x>4\end{cases}$, $E=[-10,5]$, μ – мера Лебега-Стильтьеса с порождающей функцией $F(t)=\begin{cases}1, & t\le 2\\ 4, & t>2\end{cases}$. Докажем измеримость h.

Пусть $A=\{x\in E\,|\,h(x)<C\}$. Тогда:

1) для $C>3$ $A=E=[-10;5)\cup\{5\}$ измеримо;

2) для $2<C\le 3$ $A=[10;-8)\cup(4;5]=[-10;-8)\cup\big(([4;5)\cup\{5\})\setminus\{4\}\big)$ – измеримо;

3) для $1<C\le 2$ $A=[-10;-8)$ – измеримо;

4) для $C\le 1$ $A=\varnothing$ – измеримо.

Так как h – измерима и принимает конечное число различных значений (три), то h – простая. По определению интеграла от простой функции

$$\int_E h(x)\,d\mu(x)=1\cdot\mu([-10;-8))+3\cdot\mu([-8;4])+2\cdot\mu((4;5])=A$$

$$\mu([-10;-8))=\mu^*([-10;-8))=m_F([-10;-8))=F(-8)-F(-10)=1-1=0.$$

$$\mu([-8;4])=\mu([-8;4)\cup\{4\})=\mu([-8;4))+\mu(\{4\})=$$

$$=F(4)-F(-8)+\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[4;4+\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$4-1+\lim_{n\to\infty}\left(F\left(4+\frac{1}{n}\right)-F(4)\right)=3+0=3$$

$\mu \quad 4;5 \quad = \mu \quad 4;5 \;\; т \quad 5 \;\setminus\; 4 \quad =$

$$= F \;\; 5 \; - F \;\; 4 \; + \lim_{n\to\infty}\left(F\left(5+\frac{1}{n}\right) - F \;\; 5 \;\; \right) - \lim_{n\to\infty}\left(F\left(4+\frac{1}{n}\right) - F \;\; 4 \;\; \right) =$$

$0+0-0=0$.

$A = 1\cdot 0 + 3\cdot 3 + 2\cdot 0 = 9$.

5. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Лемма (Фату). Пусть $\{f_n\}$ – последовательность измеримых на E функций, $f \geq 0$ на E и $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu < +\infty$. Тогда функция $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ интегрируема на E и $\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$.

$\lhd$Пусть $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, ...\}$. Функции g_n измеримы на E, поскольку множество $\{x\in E \mid g_n(x) < C\} = \bigcup_{k\geq n}\{x \in E \mid f_k(x) < C\}$ измеримо.

Очевидно $g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \;\forall\, x\in E$ и $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$, $x \in E$.

Покажем, что f п.в. конечна на E. Пусть $A = \{x\in E \mid f(x) = +\infty\}$ и $E_n = \{x \in E \mid g_n(x) \geq C\}$ для $C > 0$. Тогда очевидно, что $E_n \subset E_{n+1}$, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_n) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{C}\int_E g_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{C}\inf_{k\geq n}\int_E f_k d\mu =$ $= \frac{1}{C}\underbrace{\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu}_{K} = \frac{K}{C}$. Это справедливо $\forall\, C > 0$, переходя к пределу при $C \to +\infty$, получим, что $\mu(A) = 0$. По свойству 6 интеграла от неотрицательной функции, применённому к последовательности $\{g_n\}$, получим $\int_E f \; d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n \; d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n \; d\mu \rhd$

Следствие. Пусть $\{f_n\}$ такая, что $f_n \geq 0$ на E, $\exists\, K > 0: \int_E f_n d\mu \leq K \;\; \forall n \in N$ и $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ п.в. на E. Тогда функция f интегрируема на E и $\int_E f d\mu \leq K$.

Теорема 1 (Лебега о мажорированной сходимости).

Пусть последовательность $\{f_n\}$ измеримых на E функций такова, что $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ п.в. на E, где φ – интегрируема на E и п.в. на E. Тогда f интегрируема на E и $\int\limits_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu = \int\limits_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\mu$.

$\lhd$[3], с. 158–159$\rhd$.

Теорема 2 (Беппо-Леви). Дана последовательность $\{f_n\}$ интегрируемых на E функций, такая, что $f_1(x) \le f_2(x) \le f_n(x) \le \ldots$ и $\exists\ k \in R : \int\limits_E f_n d\mu \le k\ \ \forall n \in N$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ п.в. на E, f интегрируема на E и $\int\limits_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu.$.

$\lhd$[2], с. 304–305$\rhd$.

6. Сравнение интегралов Лебега и Римана

Теорема 1. Если функция интегрируема по Риману на $[a,b]$, то она интегрируема по Лебегу на $[a,b]$ и интегралы Римана и Лебега совпадают.

$\lhd$Разобьем $[a,b]$ на 2^n равных частей точками $x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a), k = \overline{0,2^n}, x_0 = a, x_{2^n} = b$. Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1,\ldots,2^n$. Тогда верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно равны:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} M_k \Delta x_k = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_k,\ M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k \Delta x_k = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_k,\ m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Так как f интегрируема по Риману на $[a,b]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Рассмотрим последовательности $\overline{f_n}$, $\underline{f_n}$: $\overline{f_n}(x) = M_k,\ x_{k-1} \le x < x_k,\ k = \overline{1,2^n}$; $\underline{f_n}(x) = m_k,\ x_{k-1} \le x < x_k$, $k = \overline{1,2^n}$.

В точке b положим эти функции равными 0. Тогда $\overline{f_n} \ge \overline{f_{n+1}}, \forall\, x \in [a,b], \forall\, n \in N,\ \ \underline{f_n} \le \underline{f_{n+1}}, \forall\, x \in [a,b], \forall\, n \in N.$

Это доказывается поведением сумм Дарбу при измельчении разбиения.

Применяя к последовательности $\underline{f_n}$ теорему Беппо-Леви, получим, что $\exists \underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f_n}(x)$ п.в. на E:
$\int\limits_{[a,b]} \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f_n}(x) d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \underline{f_n} d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = I.$

Проводя аналогичные рассуждения для $\overline{f_n}$, получим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n}(x) = \overline{f}(x)$: $\int\limits_{[a,b]} \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n}(x) d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \overline{f_n} d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = I$.

Так как $\underline{f_n}(x) \le \overline{f_n}(x)$ п.в. на $[a,b]$, то $\overline{f} - \underline{f} \ge 0$ п.в. на $[a,b]$ и поэтому из равенства $\int\limits_{[a,b]} \overline{f} - \underline{f} \; d\mu = I - I = 0$ по свойству интеграла Лебега от неотрицательной функции имеем $\overline{f} = \underline{f}$ п.в. на $[a,b]$.

Так как $\underline{f_n} \le f(x) \le \overline{f_n}$, то $\int\limits_{[a,b]} \underline{f_n} d\mu \le \int\limits_{[a,b]} f d\mu \le \int\limits_{[a,b]} \overline{f_n} d\mu$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве, получим требуемое равенство.$\rhd$.

Теорема 2 (о связи интеграла Лебега и несобственного интеграла Римана).

Для того, чтобы функция, интегрируемая по Риману в несобственном смысле была интегрируемой по Лебегу, необходимо и достаточно, чтобы несобственный интеграл Римана абсолютно сходился. При этом интегралы Лебега и Римана совпадают (без доказательства).

7. Прямые произведения мер. Теорема Фубини

Пусть S_X система подмножеств множества X, S_Y – система подмножеств множества Y. $S_X \times S_Y = \{A \times B \mid A \in X, B \in Y\}$ будет системой подмножеств множества $X \times Y$.

Утверждение 1. Если S_X, S_Y – полукольца, то $S_X \times S_Y$ полукольцо.

$\lhd$Пусть $A \in S_X Ч S_Y$, $B \in S_X \times S_Y$. Это значит, что $A = A_1 \times A_2$, $A_1 \in S_X$, $A_2 \in S_Y$, $B = B_1 \times B_2$, $B_1 \in S_X$, $B_2 \in S_Y$. Тогда

$A\cap B=(\underbrace{A_1\cap B_1}_{\in S_X})\times(\underbrace{A_2\cap B_2}_{\in S_Y})\in S_X\times S_Y$. Для «\» доказывается аналогично.

Предположим теперь, дополнительно, что $B_1\subset A_1, B_2\subset A_2$. В силу того, что S_X и S_Y – полукольца, имеют место разложения:
$A_1\setminus B_1=B_1^{(1)}\cup\ldots\cup B_1^{(k)}$, $A_2\setminus B_2=B_2^{(1)}\cup\ldots\cup B_2^{(l)}$. Тогда

$$A_1\times A_2 \setminus B_1\times B_2 = B_1\times B_2^{(1)} \cup\ldots\cup B_1\times B_2^{(l)} \cup$$
$$\cup B_1^{(1)}\times B_2 \cup B_1^{(1)}\times B_2^{(1)} \cup\ldots\cup B_1^{(1)}\times B_2^{(l)} \cup\ldots\cup$$
$$\cup B_1^{(k)}\times B_2 \cup B_1^{(k)}\times B_2^{(1)} \cup\ldots\cup B_1^{(k)}\times B_2^{(l)} \in S_X\times S_Y \rhd.$$

Утверждение 2. Пусть μ_x – мера на полукольце S_X, μ_y – мера на полукольце S_Y. Тогда формула $\mu_x\times\mu_y(A\times B)=\mu_x(A)\cdot\mu_y(B)$, $A\in S_X, B\in S_Y$ определяет меру на $S_X\times S_Y$.

$\lhd$ Неотрицательность и аддитивность меры $\mu_x\times\mu_y$ очевидна.$\rhd$.

Замечание. Если в утверждении 2 μ_x,μ_y – σ-аддитивные, то и $\mu_x\times\mu_y$ – σ-аддитивна.

Пример 1. Пусть
$X=R,\ S_X=\{[a,b)\,|\,a\le b, a,b\in R\},\ S_Y=\{[c,d)\,|\,c\le d, c,d\in R\}, \mu_x,\mu_y$ – меры Лебега на прямой. Тогда $\mu_x\times\mu_y([a,b)\times[c,d))=(b-a)(d-c)$ является мерой на $S_X\times S_Y$.

Определение 1. Лебегово продолжение меры $\mu_x\times\mu_y$ называется прямым произведением мер μ_x,μ_y и обозначается $\mu_x\otimes\mu_y$.

Пусть дано множество $A\subset X\times Y$. Множество $A_{x_0}=\{y\in Y|(x_0,y)\in A\}$ будем называть x_0 – сечением множества A.

Теорема 1 (Фубини). Пусть μ_x,μ_y полные σ-аддитивные меры и пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по мере $\mu=\mu_x\otimes\mu_y$ на множестве $A\subset X\times Y$. Тогда

$$\int_A f(x,y)d(\mu_x\times\mu_y)=\int_X\left(\int_{A_x} f(x,y)d\mu_y(y)\right)d\mu_x(x)=\int_Y\left(\int_{A_y} f(x,y)d\mu_x(x)\right)d\mu_y(y)$$

$\lhd$[3], с. 173–174$\rhd$.

Теорема 2 (Тоннели). Пусть существует один из интегралов: $\int_X\left(\int_{A_x}|f(x,y)|\,d\mu_y(y)\right)d\mu_x(x)$, $\int_Y\left(\int_{A_y} f(x,y)d\mu_x(x)\right)d\mu_y(y)$. Тогда функция $f(x,y)$ интегрируема на A и справедливо равенство теоремы Фубини. $\lhd$[2], с. 318$\rhd$.

8. Понятие заряда

Определение 1. Счетно-аддитивную функцию Φ, определенную на σ-алгебре Σ, принимающую конечные значения, будем называть *зарядом* или *знакопеременной мерой*.

Пример 1. σ-аддитивная мера, определенная на Σ – σ-алгебре, является зарядом.

Пример 2. Пусть μ_1, μ_2 – σ-аддитивные меры на σ-алгебре Σ, тогда $\mu_1 - \mu_2$ представляет собой заряд.

Пример 3. Пусть $\Phi(A) = \int\limits_A f(x)d\mu$, где $A \subset X$, f интегрируемая функция на X. Тогда Φ – заряд.

Определение 2. Пусть Φ заряд на Σ (σ-алгебре подмножеств множества X). Множество $A \subset X$ будем называть *положительным относительно заряда* Φ, если для любого множества $B \subset A{:}B \in \Sigma$, выполняется $\Phi(B) \geq 0$.

Аналогично определяется отрицательное множество($\Phi(B) \leq 0$).

Теорема 1. Пусть Φ заряд на Σ (σ-алгебре подмножеств множества X). Тогда существуют положительное X^+ и отрицательное $X^-: X = X^+ \sqcup X^-$ и $\forall\, A \in \Sigma: A \cap X^+ \in \Sigma,\ A \cap X^- \in \Sigma$.

Замечание. Разложение $X^-: X = X^+ \sqcup X^-$ на отрицательную и положительную части называется разложением Хана.

$\lhd$[1], с. 65-67$\rhd$.

Пусть $A \in \Sigma$. Положим по определению $\Phi^+(A) := \Phi(A \cap X^+)$ и $\Phi^-(A) := -\Phi(A \cap X^-)$. Очевидно, что Φ^+, Φ^- – неотрицательные. $\Phi(A) = \Phi^+(A) - \Phi^-(A)$ называют *разложением Жордана,* Φ^+, Φ^- называют соответственно *верхней* и *нижней вариацией,* а $|\Phi(A)| = \Phi^+(A) + \Phi^-(A)$ – полной вариацией знакопеременной меры Φ.

Определение 3. Пусть Φ – заряд, определенный на σ-алгебре Σ подмножеств множества X и μ – σ-аддитивная мера, определённая на σ-алгебре Σ подмножеств множества X. Заряд Φ называется абсолютно-непрерывным относительно меры μ, если $\Phi(A) = 0, \forall\, A \in \Sigma$, такого, что $\mu(A) = 0$.

Теорема 2 (Радона-Никодима). Пусть μ – полная, конечная и σ-аддитивная мера на σ-алгебре Σ подмножеств множества X, а Φ заряд на Σ, абсолютно-непрерывный относительно μ. Тогда $\exists!$

с точностью до μ-эквивалентности интегрируемая функция f на любом из множеств $A \in \Sigma : \Phi(A) = \int\limits_A f d\mu$. При этом функцию f называют производной заряда Φ и обозначают: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \mu}$.

$\triangleleft$ [1], с. 70–71 $\triangleright$.

9. Функции с ограниченными изменениями. Восстановление функции по ее производной

9.1. Функции ограниченной вариации

Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$.

Свойства монотонных функций:

1. Если f монотонна на $[a,b]$, то она ограничена, измерима и, значит, интегрируема на $[a,b]$.

$\triangleleft$ Пусть f монотонно неубывающая функция. Тогда $f(a) \le f(x) \le f(b)\ \forall x \in [a,b]$. Далее, $\forall\ C \in R\ \ A_C = \{x \in [a,b] \mid f(x) < C\}$ есть либо отрезок, либо полуинтервал, либо $\varnothing$, то есть измеримое множество и $\Rightarrow f$-измерима. Аналогично для невозрастающей функции. $\triangleright$.

2. Монотонная функция имеет разрывы только 1-го рода.

$\triangleleft$ Пусть f неубывающая на $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ и $x_n \to x_0$, причем $x_n < x_0$. $\{f(x_n)\}$ ограничена сверху и снизу (например, $f(a)$ и $f(b)$). Следовательно, она имеет хотя бы одну предельную точку, но наличие у любой такой последовательности нескольких предельных точек противоречило бы монотонности f. Таким образом, $\exists\ f(x_0 - 0)$. Аналогично $\exists\ f(x_0 + 0)$ $\triangleright$.

3. Множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.

$\triangleleft$Действительно, сумма любого конечного числа скачков монотонной f на $[a,b]$ не превосходит $|f(b) - f(a)|$. Для каждого n число скачков, величина которых больше чем $\dfrac{1}{n}$, конечно. Суммируя по всем $n = 1, 2, \ldots$, получаем, что общее число скачков конечно или счетно.$\rhd$

Определение 1. Пусть на $[a,b]$ задано не более, чем счетное число точек $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ и каждой из них поставлено в соответствие конечное положительное число h_n. Определим f на $[a,b]$, положив $f(x)=\sum\limits_{x_n<x} h_n$. $f(x)$ назовем *функцией скачков*.

Ясно, что она монотонно неубывающая, кроме того, она непрерывна слева, будет разрывна в x_n и в каждой такой точке иметь скачок h_n.

4. **Теорема 1.** Всякую монотонную, непрерывную слева, функцию можно представить как сумму непрерывной монотонной функции и функции скачков.

$\lhd$Пусть f – неубывающая непрерывная слева функция и $x_1,x_2,\ldots$ – все ее точки разрыва, а $h_1,h_2,\ldots$ ее скачки в этих точках. Положим $H(x)=\sum\limits_{x_n<x} h_n$. Покажем, что $\varphi=f-H$ есть неубывающая непрерывная функция.

$\varphi(x'')-\varphi(x')=(f(x'')-f(x'))-(H(x'')-H(x'))$, где $x'<x''$. Ясно, что эта разность неотрицательна, так как справа стоит разность между полным приращением функции f на $[x',x'']$ и суммой её скачков на этом отрезке. Поэтому φ – неубывающая.

Далее, $\forall\, x$ имеем

$$\varphi(x-0)=f(x-0)-H(x-0)=f(x-0)-\sum_{x_n<x} h_n;$$

$$\varphi(x+0)=f(x+0)-H(x+0)=f(x+0)-\sum_{x_n\le x} h_n.$$

Откуда $\varphi(x+0)-\varphi(x-0)=f(x+0)-f(x-0)-h=0$, где h скачок функции H в точке x. Отсюда и из непрерывности f,H слева вытекает непрерывность $\varphi\rhd$.

Теорема 2 (Лебега о дифференцируемости монотонной функции). Всякая монотонная функция на $[a,b]$ имеет почти всюду на этом отрезке конечную производную.

$\lhd$[2], гл. 6. § 1. п. 2.$\rhd$

Следствие. Если f интегрируема на $[a,b]$, то $\int\limits_a^x f(t)\,d\mu$ имеет п.в. производную на $[a,b]$.

$\lhd$ Так как $\int\limits_a^x f(t)\,d\mu(t) = \int\limits_a^x f^+(t)d\mu(t) - \int\limits_a^x f^-(t)d\mu(t)$, а $\int\limits_a^x f(t)\,d\mu$ для неотрицательной функции является монотонной функцией, то п.в. на $[a,b]$ $\exists \dfrac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)d\mu(t) \rhd$

Определение 2. Функция f, определенная на $[a,b]$, имеет *ограниченное изменение* или *ограниченную вариацию*, если $V_a^b[f] = \sup\left\{\sum\limits_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|\right\} < +\infty$, где супремум берется по всем конечным разбиениям $[a,b]$, то есть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

$V_a^b[f]$ называется *полной вариацией функции* f *по* $[a,b]$.

Введем *полную вариацию по* R следующим образом: $V_R\ f\ = \lim\limits_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} V_a^b\ f$

Теорема 3. Функция f имеет ограниченную вариацию $\Longleftrightarrow$ когда $f = g - \alpha$, где g, α монотонные неубывающие функции.

$\lhd$[2], гл. 6. § 2$\rhd$

Следствие 1. Функции ограниченной вариации имеют почти всюду конечную производную.

$\lhd$Из теорем 2 и 3$\rhd$.

Следствие 2. $\int\limits_a^x f(t)\,d\mu$ для любой интегрируемой на $[a,b]$ функции f имеет ограниченную вариацию.

$\lhd$Очевидно$\rhd$.

9.2. Восстановление функции по ее производной

Теорема 4. Если f интегрируема на $[a,b]$, то $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$ п.в. на $[a,b]$.

$\lhd$[2], гл. 6. § 1. п. 2.$\rhd$

Определение 3. Функция f, определенная на $[a,b]$, называется *абсолютно непрерывной* на $[a,b]$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall$ конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k), k = \overline{1,n}$

из $[a,b]$ с суммой длин $\sum_{k=1}^{n} b_k - a_k < \delta$, выполнено неравенство $\sum_{k=1}^{n} | f(b_k) - f(a_k) | < \varepsilon.$

Утверждение 1. Если f абсолютно непрерывна на $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на $[a,b]$.

$\lhd \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in [a,b] : | x' - x'' | < \delta \Rightarrow | f(x'') - f(x') | < \varepsilon$ (то есть взят интервал (x', x'')) $\rhd$

Замечание. Обратное неверно.

Пример 1. Функция равномерно непрерывная на [0,1], но не абсолютно непрерывная – это Канторова лестница.

Пусть $f(x) = \frac{2k-1}{2^n}$, $k = \overline{1, 2^{n-1}}$ на k-м смежном интервале n-го порядка канторовского множества, включая и его концы, на [0,1] (интервалы нумеруются слева направо). То есть $f(x) = \frac{1}{2}, x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $f(x) = \frac{1}{4}, x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$, $f(x) = \frac{3}{4}, x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ и т. д. Доопределим функцию в оставшихся точках как предел возрастающей (или убывающей) последовательности концов смежных интервалов, сходящихся к этим точкам. Полученная функция является монотонной и непрерывной на $[0, 1]$.

Теорема Лебега. Производная f абсолютно непрерывной функции F на $[a,b]$, интегрируема на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ $\int_a^x f(t)\, d\mu(t) = F(x) - F(a).$

$\lhd$[2], гл. 6. § 4$\rhd$.

Литература

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. − Минск : БГУ, 2003. − 430 с.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. − М. : Наука, 1976. – 544 с.
3. Садовничий, В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. – 2-е изд. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.
4. Мухин, В. В. Мера и интеграл Лебега : методическая разработка по курсу «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов 2 курса университетов специальности 2013 – Математика / В. В. Мухин, Д. П. Ющенко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 1988. – 40 с.

Производственно-практическое издание

Казимиров Григорий Николаевич,
Горский Сергей Михайлович

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 17.10.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,3.
Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 25 экз. Заказ 771.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель

Г. Н. КАЗИМИРОВ, С. М. ГОРСКИЙ

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Гомель
2017