Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.542

О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{N}^n$-формациях

И. Н. Сафонова

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [1–4].

При изучении структурного строения насыщенных формаций и их классификации важную роль играют так называемые минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации [5] (или иначе $\mathfrak{H}_l$-критические формации [6]), т.е. такие насыщенные формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, у которых все собственные насыщенные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Впервые задача изучения формаций такого рода была поставлена Л. А. Шеметковым на VI симпозиуме по теории групп [5]. В цикле работ А.Н.Скибы 1980-1993 г.г. разработана теория критических насыщенных формаций и получено описание минимальных насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций для целого ряда насыщенных формаций (см., например, [2]). Завершающим результатом в этом направлении стало описание минимальных насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ — произвольная формация классического типа [7] (формация $\mathfrak{F}$ называется формацией классического типа, если она имеет такой локальный экран, все неабелевы значения которого насыщенные формации).

Развитие теории частично насыщенных формаций вызвало необходимость изучения и описания критических ω-насыщенных формаций (ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$). Вопросу классификации минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций посвящены работы [8] – [16].

Развивая отмеченный выше результат А.Н.Скибы, в работе [12] автором получена классификация минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, в случае когда $\mathfrak{H}$ — произвольной формация классического типа.

В работах [14]– [16] данный результат использован при описании минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, для следующих формаций $\mathfrak{H}$: формации всех π-разрешимых, π-нильпотентных, π-сверхразрешимых, π-замкнутых, π-специальных и π-разложимых групп, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, а также формации всех φ-дисперсивных групп, где φ — некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел.

В данной работе нами получено описание минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, где $\mathfrak{H}$ — формация всех разрешимых групп, нильпотентная длина которых не превосходит n.

2. Вспомогательные результаты

Сформулируем в виде лемм следующие известные результаты.

Лемма 1 [2, с.75]. *Пусть f_1 — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, h — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, что*

$$f(p) = \begin{cases} f_1(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ h(p), & \text{если } p \in \pi'(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Лемма 2 [12]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа и h — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\tau = \pi(P)\bigcap\omega = \varnothing$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

(1) $G = P$ — группа простого порядка;

(2) P — неабелева группа и $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \tau$;

(3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$, что $p \notin \pi(Q)$ и либо $\Phi(H) = 1$ и $H^{h(q)} \subseteq Q$ для любого $q \in \pi(Q)$, либо H — минимальная не $h(p)$-группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q.

Лемма 3 [1, с.31]. *Локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f, причем f удовлетворяет следующему условию: $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого числа p.*

Лемма 4 [2, с.79]. *Пусть H/K главный фактор группы G, $p \in \pi(H/K)$. Тогда $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$.*

3. Основной результат

Класс всех разрешимых групп с нильпотентной длиной не превосходящей n, очевидно, совпадает с произведением $\mathfrak{N}^n$ и является формацией классического типа.

Теорема 1. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{N}^n$-формация, когда $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что либо $\tau = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$ и P совпадает с $\mathfrak{N}^n$-корадикалом группы G, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) P — неабелева группа, причем если $\tau = \{p\}$, то $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}}$, если же $|\tau| \geq 2$, то группа G/P принадлежит $\mathfrak{N}^{n-1}$;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$, $H = [Q]N$, $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}^n$, h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Тогда поскольку $\mathfrak{N}^n = \mathfrak{N}\mathfrak{N}^{n-1}$, то ввиду леммы 1 формация $\mathfrak{H}$ имеет такой внутренний локальный экран t, что $t(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}$ для всякого простого числа p. Согласно лемме 3 имеет место равенство $t = h$.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация. Ввиду леммы 2 $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\tau = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) P — неабелева группа и $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \tau$;

(2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$, что $p \notin \pi(Q)$ и либо $\Phi(H) = 1$ и $H^{h(q)} \subseteq Q$ для любого $q \in \pi(Q)$, либо H — минимальная не $h(p)$-группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q.

Если $\tau = \varnothing$, то, очевидно, группа G удовлетворяет условию теоремы. Пусть $\tau \neq \varnothing$. Допустим, что для группы G выполняется условие (1) и пусть $p \in \tau$. Тогда поскольку $P = G^{h(p)}$ и $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}$, то $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}}$ для любого $p \in \tau$. Допустим, что

$|\tau| \geq 2$ и p и q различные простые числа из τ. Тогда, $G/P \in h(p) \cap h(q)$. Следовательно,

$$G/P \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1} \cap \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1} = (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q)\mathfrak{N}^{n-1} = \mathfrak{N}^{n-1}.$$

Таким образом, $G/P \in \mathfrak{N}^{n-1}$ и группа G удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь для группы G выполняется условие (2). Поскольку в силу леммы 1 формация $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}$ является насыщенной, а по условию $Q = H^{h(p)}$, то $\Phi(H) = 1$. Так как $G/P \in \mathfrak{N}^n$, то H — разрешимая группа. Поэтому Q — абелева минимальная q-подгруппа группы H. Поскольку $\Phi(H) = 1$, то $Q = C_H(Q)$ и $H = [Q]N$ для некоторой максимальной подгруппы N из H. Таким образом, $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$, $H = [Q]N$, $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H, т.е. группа G удовлетворяет условию 2) теоремы .

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$, где G — группа из условия теоремы. Используя лемму 2, покажем, что формация $\mathfrak{F}$ является минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{N}^n$-формацией.

При $\tau = \varnothing$ очевидно, что группа G удовлетворяет требованиям леммы 2. Поэтому $\mathfrak{F}$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{N}^n$-формация.

Пусть $\tau \neq \varnothing$ и для группы G выполняется условие 1). Пусть $p \in \tau$. Тогда поскольку $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}$, то $G/P \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1} = h(p)$. Так как при этом P — неабелев монолит группы G, то $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \tau$. Пусть $|\tau| \geq 2$. Так как $G/P \in \mathfrak{N}^{n-1}$ и $\mathfrak{N}^{n-1} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1} = h(p)$, то мы снова получаем, что $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \tau$.

Кроме того, поскольку $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1} \subseteq \mathfrak{N}^n$ и $P = G^{h(p)}$ — неабелева группа, то $P = G^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, группа G удовлетворяет требованиям условия (2) леммы 2. Поэтому $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$ является минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{N}^n$-формацией.

Пусть теперь для группы G выполняется условие 2). Пусть $p \in \pi(P)$ и $q \in \pi(Q)$. В силу леммы 4 $p \neq q$. Покажем, что $Q = H^{h(p)}$ и $H^{h(q)} \subseteq Q$. Действительно, по условию $Q = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}$. Поэтому $H \in \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1}$.

Так как $p \neq q$ и $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}$, имеем $Q = H^{h(p)}$. Кроме того, так как $H \in \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1} = h(q)$, то $H^{h(q)} = 1 \subseteq Q$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию (3) леммы 2. Значит, $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{N}^n$-формация. Теорема доказана.

4. Некоторые следствия

Рассмотрим наиболее важные следствия основного результата работы.

В случае когда $n = 1$ или 2 из теоремы 1 соответственно получаем

Следствие 1 (Джарадин Джехад [9]). *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная ω-насыщенная ненильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [P]Q$ — q-замкнутая pd-группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $P = O_p(G)$, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ —простое число;

2) $P = G^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева pd-группа для некоторого простого числа $p \in \omega$, и если $|\omega \cap \pi(P)| > 1$, то $G = P$ — простая неабелева группа;

3) P — ω'-группа.

Следствие 2. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная ω-насыщенная неметанильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$, где G — такая неметанильпотентная монолитическая группа с монолитом P, что группа G/P метанильпотентна и либо $\tau = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) P — неабелева группа, причем если $\tau = \{p\}$, то $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}}$, если же $|\tau| \geq 2$, то группа G/P нильпотентна;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$, $H = [Q]N$, $Q = C_H(Q)$ — минимальная нормальная подгруппа в H и N — нильпотентная группа.

Пусть теперь $\omega = \{p\}$. Тогда $n = 1$ или 2, соответственно, из теоремы 1 вытекают

Следствие 3 (Джарадин Джехад [8]). *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная p-насыщенная ненильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l^p\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) группа P неабелева pd-группа и G/P — p-группа;

2) $G = [P]Q$ — p-замкнутая pd-группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$;

3) P — p'-группа.

Следствие 4. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная p-насыщенная неметанильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l^p\mathrm{form}G$, где G — такая неметанильпотентная монолитическая группа с монолитом P, что группа G/P метанильпотентна и при $p \in \pi(P)$ выполняется одно из следующих условий:*

1) $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}}$ — неабелева группа;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$, $H = [Q]N$, $Q = C_H(Q)$ — минимальная нормальная подгруппа в H и N — нильпотентная группа.

Кроме того, имеет место

Следствие 5. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная p-насыщенная не $\mathfrak{N}^n$-формация, когда $\mathfrak{F} = l^p\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что либо $p \notin \pi(P)$ и P совпадает с $\mathfrak{N}^n$-корадикалом группы G, либо $p \in \pi(P)$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{n-1}}$ — неабелева группа;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$, $H = [Q]N$, $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H.

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел из теоремы 1 вытекают

Следствие 6 (А.Н.Скиба [2, с.191]). *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная насыщенная ненильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, и выполняется одно из следующих условий:*

1) G — группа Шмидта;

2) G — простая неабелева группа.

Следствие 7 (А.Н.Скиба [2, с.191]). *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная насыщенная неметанильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, где G — такая неметанильпотентная монолитическая группа с монолитом P, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $P = G^{\mathfrak{N}}$ — неабелева группа;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$, $H = [Q]N$, $Q = C_H(Q)$ — минимальная нормальная подгруппа в H и N — нильпотентная группа.

Следствие 8 (А.Н.Скиба [2, с.189]). *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная насыщенная не $\mathfrak{N}^n$-формация, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, где G — одна из следующих групп:*

1) монолитическая группа с таким неабелевым монолитом P, что фактор группа G/P разрешима и $l(G/P) + 1 \leq n$;

2) $G = [P]([Q]N)$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, $Q = C_{[Q]N}(Q)$ — минимальная нормальная подгруппа в $[Q]N$, N — разрешимая группа с $l(N) = n - 1$.

Abstract We give a description of minimal ω-saturated non-$\mathfrak{H}$-formations, where $\mathfrak{H}$ is a formation of all soluble finite groups with nilpotent length $\leq n$.

Литература

1. Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

2. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, Формации алгебраических систем, Москва, Наука, 1989.

3. А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Минск, Беларуская навука, 1997.

4. А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп, Матем. труды, **2**, № 2 (1999), 114–147.

5. Л. А. Шеметков, Экраны ступенчатых формаций, Тр. VI Всесоюзн. симпозиум по теории групп, Киев, Наукова думка, 1980, 37–50.

6. А. Н. Скиба, О критических формациях, Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук, № 4 (1980), 27–33.

7. А. Н. Скиба, О критических формациях. В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев, Ин-т математики АН Украины, 1993, 258–268.

8. Джарадин Джехад, Минимальные p-насыщенные ненильпотентные формации, Вопросы алгебры, Гомель, Изд-во Гомельского ун-та, Вып. 8 (1995), 59–64.

9. Джарадин Джехад, Классификация p-локальных формаций длины ≤ 3, Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук, Д 02.12.01, Гом. гос. ун-т. Гомель, 1996.

10. В. Н. Рыжик, О критических p-локальных формациях, Препринт, Гомельский госуниверситет, Гомель, № 58 (1997).

11. И. Н. Сафонова, О минимальных ω-локальных несверхразрешимых формациях, Вопросы алгебры, Гомель, Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, Вып. 12 (1998), 123–130.

12. И. Н. Сафонова, О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях, Весці НАН Беларусі, Сер. фіз.-мат. навук, № 2 (1999), 23–27.

13. И. Н. Сафонова, О существовании $\mathfrak{H}_\omega$-критических формаций, Известия Гомельского госуниверситета, № 1(1) (1999), 118–126.

14. И. Н. Сафонова, К теории $\mathfrak{H}_{l^\omega}$-критических формаций конечных групп, Известия Гомельского госуниверситета, № 3 (6) (2001), 124–133.

15. И. Н. Сафонова, К теории критических ω-насыщенных формаций конечных групп, Вестник Полоцкого гос. ун-та, Серия С, № 11 (2004), 9–14.

16. И. Н. Сафонова, К теории критических частично насыщенных формаций, Известия Гомельского госуниверситета, № 6 (27) (2004), 82–87.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.04.06