Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. В. МОЖАРОВСКИЙ, Т. М. ДЁМОВА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Практическое руководство

для студентов специальностей
1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)»,
1-31 03 03 «Прикладная математика»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 519.612(076)
ББК 22.193.1я73
М746

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук Н. А. Марьина;
кандидат физико-математических наук Д. С. Кузьменков

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Можаровский, В. В.

М746 Вычислительные методы алгебры : практическое руководство В. В. Можаровский, Т. М. Дёмова ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 45 с.
ISBN 978-985-577-358-1

Практическое руководство предназначено для оказания помощи студентам в овладении базовых знаний по методам решения задач для курса «Вычислительные методы алгебры». В нём кратко излагается теоретический материал и даются указания по основным методам решения систем линейных алгебраических уравнений, задач на собственные значения.

Адресовано студентам специальностей 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)», 1-31 03 03 «Прикладная математика».

УДК 519.612(076)
ББК 22.193.1я73

ISBN 978-985-577-358-1

Оглавление

Предисловие

Многие математические модели физических процессов определяются как решения краевых задач математической физики применительно к различным техническим системам. Наиболее эффективными методами в практике являются численные методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод суперэлементов и метод граничных элементов. Все эти методы позволяют свести решение граничной задачи к решению линейных и (или) нелинейных алгебраических систем уравнений.

Дисциплина «Вычислительные методы алгебры» предназначена для формирования прочных знаний и практических навыков в области численных методов, математического моделирования и алгоритмизации, применения информационных технологий и программного обеспечения, повышения эффективности использования компьютерной техники, овладения основными принципами решения математических задач. При построении курса использовались современные теории, используемые в мировой практике и технологии разработки программ, применяющихся для построения методик решения задач в прикладной математике.

Целью дисциплины «Вычислительные методы алгебры» является овладение студентами основными вычислительными методами решения задач алгебры, которые имеют приложения при решении различных классов прикладных задач: методами решения систем линейных алгебраических уравнений, основанных на разложении матрицы; методами, основанными на построении вспомогательной системы векторов; итерационными методами решения СЛАУ; методами решения задач на собственные значения; полной и частичной проблемой собственных значений.

В результате изучения данной дисциплины студенты приобретают прочные навыки разработки численных методик и алгоритмов математического моделирования, решения различных задач и их реализации на языках программирования .

Материал курса «Вычислительные методы алгебры» базируется на ранее полученных студентами знаниях по таким дисциплинам, как «Математический анализ», «Матричный анализ» и «Программирование».

Дисциплина «Вычислительные методы алгебры» изучается студентами 2 курса по специальностям 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)», 1-31 03 03 «Прикладная математика».

При подготовке заданий, теоретических зависимостей и примеров в издании использовалась литература, список которой приведен в конце. Так как методы, описанные в практическом руководстве, много раз и в различных вариантах изложены в разных изданиях, вследствие этого в тексте не содержатся ссылки на литературу.

Тема 1. Методы исключения

1.1 Классификация методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Схема единственного деления.
1.2 Метод Жордана.
1.3 Метод оптимального исключения.
1.4 Метод Гаусса с выбором главного элемента.

1.1 Классификация методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Схема единственного деления

К решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики. В настоящее время предложено огромное количество алгоритмов решения таких систем.

Все методы решения линейных алгебраических уравнений можно разделить на две большие группы: прямые и итерационные. В прямых (или точных) методах решение системы находится за конечное число арифметических действий. Итерационные методы позволяют найти за конечное число итераций приближенное решение системы с любой наперед заданной точностью ε.

Примером прямого метода решения СЛАУ служит метод Крамера, в соответствии с которым

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = \overline{1,n}.$$

Однако на практике этот метод не используется, так как он требует выполнения очень большого количества арифметических операций. Большая часть существующих прямых методов укладывается в следующую схему. Пусть задана система

$$Ax = b \tag{1}$$

линейных алгебраических уравнений. Умножим обе части равенства (1) слева на такие матрицы $L_1, L_2, \ldots, L_k$, при которых новая система

$$L_k L_{k-1} \ldots L_2 L_1 Ax = L_k L_{k-1} \ldots L_2 L_1 b \tag{2}$$

равносильна исходной и легко решается. Для этого достаточно, чтобы матрица $L_k L_{k-1} \ldots L_2 L_1 A$ была треугольной или диагональной. Методы, основанные на подобных преобразованиях, составляют в настоящее время самую значительную группу среди численных методов задач алгебры.

Одним из старейших является метод Гаусса, в основе которого лежит идея последовательного исключения неизвестных. Он использует левые треугольные матрицы L_i и позволяет свести исходную систему уравнений к системе с правой треугольной матрицей. Этот метод легко реализуется на компьютере, его схема с выбором главного элемента позволяет решать системы с произвольной невырожденной матрицей, а компактная схема – получить результаты с повышенной точностью. Среди всех прямых методов метод Гаусса требует минимального объема вычислений.

Метод Гаусса и его модификации основаны на приведении с помощью элементарных преобразований исходной системы к системе верхней треугольной или диагональной матрицы. В схеме единственного деления на каждом шаге строка делится на элемент, стоящий на главной диагонали (ведущий элемент), и исключаются элементы под главной диагональю. Предположим, что $A^{(0)}=A$, $b^{(0)}=b$ и $k-1$ шагов метода уже сделаны. Тогда на k-м шаге расчетные формулы имеют вид:

$$a_{k,j}^{(k)}=\frac{a_{k,j}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}, \qquad j=\overline{k,n}; \tag{3}$$

$$b_k^{(k)}=\frac{b_k^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}; \tag{4}$$

$$a_{i,j}^{(k)}=a_{i,j}^{(k-1)}-a_{k,j}^{(k)}\cdot a_{i,k}^{(k-1)}; \tag{5}$$

$$b_i^{(k)}=b_i^{(k-1)}-b_k^{(k)}\cdot a_{i,k}^{(k-1)}, \quad j=\overline{k,n}, \quad i=\overline{k+1,n}. \tag{6}$$

После n-го шага матрица системы принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2}^{(n)} & a_{1,3}^{(n)} & \dots & a_{1,n}^{(n)} \\ 0 & 1 & a_{2,3}^{(n)} & \dots & a_{2,n}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Процесс приведения матрицы исходной системы к системе с верхней диагональной матрицей называется прямым ходом метода Гаусса, а процесс получения значений неизвестных – обратным ходом. Неизвестные из преобразованной системы находятся по формулам:

$$x_n=b_n^{(n)}, \quad x_i=b_i^{(n)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{i,j}^{(n)}x_j, \quad i=n-1,n-2,\dots,1. \tag{8}$$

После преобразования исходной системы по схеме единственного деления получаем систему вида $Cx=b^{(n)}$, где матрица C − это матрица (7).

Подставляя в (1) выражение для $b^{(n)}$ в виде $b^{(n)} = B^{-1}b$, приходим к уравнению $Cx = B^{-1}b$ или, что то же самое, к уравнению $BCx = b$. Сопоставляя последнюю систему с системой (1), приходим к выводу, что при применении метода Гаусса матрица A системы есть произведение нижней треугольной матрицы B на верхнюю треугольную матрицу C с единичной главной диагональю, т. е. $A = B \cdot C$.

1.2 Метод Жордана

В отличие от схемы единственного деления исключение элементов в методе Жордана проводится над и под главной диагональю, т. е. матрица системы приводится не к верхней треугольной, а к диагональной. В этом случае отсутствует обратный ход метода Гаусса, а решением системы является столбец свободных членов, т. е. $x_i = b_i^{(n)}$, $i = \overline{1,n}$.

После выполнения k шагов метода по формулам определяем

$$a_{k,j}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}, \quad b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}, \quad j = \overline{k,n};$$

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - a_{k,j}^{(k)} \cdot a_{i,k}^{(k-1)};$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - b_k^{(k)} \cdot a_{i,k}^{(k-1)};$$

$$j = \overline{k,n}, \quad i = \overline{1,n}, \quad i \neq k.$$

Матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{1,n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(k)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Метод Жордана при решении СЛАУ практически не дает никаких преимуществ в сравнении со схемой единственного деления, так как он требует для вычисления $\frac{(n+3)n^2}{2}$ операций умножения и деления.

Но при обращении матрицы этот метод требует меньшей оперативной памяти – всего n^2 ячеек.

1.3 Метод оптимального исключения

Существенное достоинство этого метода состоит в том, что он позволяет решать системы более высокого порядка при одних и тех же затратах оперативной памяти. Предположим, что после преобразования первых k уравнений матрица преобразованной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{1,n}^{(k)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,k+1}^{(k)} & \dots & a_{2,n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Исключим неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_k$ из $(k+1)$-го уравнения с помощью k первых уравнений и разделим полученное уравнение на коэффициент, стоящий при x_{k+1}.

С помощью полученного уравнения исключим x_{k+1} из k первых уравнений системы. В результате получаем систему с матрицей (10), но с заменой индекса k на $k+1$. Все вычисления в методе оптимального исключения проводятся по формулам:

$$a_{k+1,j}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1,j} - \sum_{m=1}^{k} a_{m,j}^{(k)} \cdot a_{k+1,m}}{a_{k+1,k+1} - \sum_{m=1}^{k} a_{m,k+1}^{(k)} \cdot a_{k+1,m}};$$

$$b_{k+1}^{(k+1)} = \frac{b_{k+1} - \sum_{m=1}^{k} b_{m}^{(k)} \cdot a_{k+1,m}}{a_{k+1,k+1} - \sum_{m=1}^{k} a_{m,k+1}^{(k)} \cdot a_{k+1,m}};$$

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - a_{k+1,j}^{(k+1)} \cdot a_{i,k+1}^{(k)};$$

$$b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - b_{k+1}^{(k+1)} \cdot a_{i,k+1}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = k+2, k+3, \dots, n.$$

После преобразования всех уравнений находим решение исходной системы

$$x_i = b_i^{(n)}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Для решения системы уравнений n-го порядка по методу оптимального исключения необходимо выполнить столько операций умножения и деления, как и в схеме единственного деления Гаусса.

1.4 Метод Гаусса с выбором главного элемента

Иногда может оказаться, что система (1) имеет единственное решение, хотя какой-либо из главных миноров матрицы A равен нулю. Кроме того, заранее неизвестно, все ли главные миноры матрицы отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться непригодным, так как в процессе вычисления какой-то ведущий элемент $a_{k,k}^{(k-1)}$ станет равным нулю. Если на главной диагонали элемент $a_{k,k}^{(k-1)}$ мал, то деление на этот элемент приводит к значительным ошибкам округления. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента. В этом методе исключается не следующее по порядку неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю. При применении такого варианта метода Гаусса не будет происходить деление на нуль. Различают три варианта метода Гаусса с выбором главного элемента:

а) метод Гаусса с выбором главного элемента по строке: в системе на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация переменных;

б) метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу: на каждом шаге исключения проводится перенумерация уравнений;

в) метод Гаусса с выбором главного элемента во всей матрице системы: в этом случае проводится перенумерация и переменных и уравнений.

С точки зрения программной реализации вариант б) является более привлекательным, так как он не требует перенумерации переменных, что приводит к потере однородности вычислительного процесса. Метод Гаусса с выбором главного элемента позволяет уменьшить погрешность округления, но при решении плохо обусловленных систем устойчивость этого метода может оказаться недостаточной.

Вопросы для самоконтроля

1 Как построить схему единственного деления для решения СЛАУ?

2 В чем сущность метода Жордана для решения СЛАУ? Привести примеры.

3 В чем сущность метода оптимального исключения для решения СЛАУ? Привести примеры.

4 В чем сущность метода Гаусса с выбором главного элемента для решения СЛАУ? Привести примеры.

5 В чем отличия методов Жордана, Гаусса с выбором главного элемента и оптимального исключения?

Практические задания

Решить систему линейных алгебраических уравнений (таблица 1):

а) методом Гаусса по схеме единственного деления;

б) методом Гаусса с выбором главного элемента.

Таблица 1

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} 0{,}14x_1+0{,}24x_2-0{,}84x_3=1{,}11 \\ 1{,}07x_1-0{,}84x_2+0{,}56x_3=0{,}48 \\ 0{,}64x_1+0{,}43x_2-0{,}38x_3=-0{,}83 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2{,}56x_1+0{,}67x_2-1{,}78x_3=1{,}14 \\ 0{,}67x_1-2{,}67x_2+1{,}35x_3=0{,}66 \\ -1{,}78x_1+1{,}35x_2-0{,}55x_3=1{,}72 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2{,}74x_1-1{,}18x_2+3{,}17x_3=2{,}18 \\ 1{,}12x_1+0{,}83x_2-2{,}16x_3=-1{,}15 \\ 0{,}81x_1+1{,}27x_2+0{,}76x_3=3{,}23 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 1{,}63x_1+1{,}27x_2-0{,}84x_3=1{,}51 \\ 1{,}27x_1+0{,}65x_2+1{,}27x_3=-0{,}63 \\ -0{,}84x_1+1{,}27x_2-1{,}21x_3=-2{,}15 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 1{,}00x_1+0{,}42x_2+0{,}54x_3=0{,}66 \\ 0{,}42x_1+1{,}02x_2+0{,}32x_3=1{,}44 \\ 0{,}66x_1+0{,}32x_2-0{,}22x_3=6{,}61 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 4{,}51x_1-1{,}8x_2+3{,}6x_3=-1{,}7 \\ 3{,}1x_1+2{,}3x_2-1{,}2x_3=3{,}6 \\ 1{,}8x_1+2{,}5x_2+4{,}6x_3=2{,}2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2{,}11x_1+3{,}01x_2+4{,}02x_3=0{,}22 \\ 0{,}18x_1+3{,}41x_2+0{,}15x_3=1{,}43 \\ 2{,}14x_1+0{,}17x_2+0{,}26x_3=1{,}18 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 1{,}32x_1-0{,}58x_2+3{,}17x_3=3{,}18 \\ 0{,}42x_1+0{,}45x_2-2{,}16x_3=-2{,}15 \\ 0{,}71x_1+1{,}27x_2+1{,}76x_3=1{,}23 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 165x_1-1{,}76x_2+0{,}77x_3=2{,}15 \\ -1{,}76x_1+1{,}04x_2-2{,}61x_3=0{,}82 \\ 0{,}77x_1-2{,}61x_2-3{,}18x_3=-0{,}73 \end{cases}$	10	$\begin{cases} -1{,}1x_1+1{,}12x_2+1{,}84x_3=1{,}89 \\ 1{,}56x_1-1{,}27x_2+0{,}18x_3=-2{,}64 \\ 1{,}21x_1+0{,}87x_2+1{,}22x_3=1{,}04 \end{cases}$

Окончание таблицы 1

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
11	$\begin{cases} 1{,}00x_1+0{,}42x_2+0{,}54x_3=0{,}66 \\ 0{,}42x_1+1{,}02x_2+0{,}32x_3=1{,}44 \\ 0{,}66x_1+0{,}32x_2-0{,}22x_3=6{,}61 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 1{,}42x_1-2{,}15x_2+1{,}07x_3=2{,}48 \\ -2{,}15x_1+0{,}76x_2-2{,}18x_3=1{,}15 \\ 1{,}07x_1-2{,}18x_2+1{,}23x_3=0{,}88 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 1{,}11x_1+0{,}12x_2+0{,}14x_3=1{,}54 \\ 0{,}16x_1+1{,}17x_2+0{,}18x_3=-1{,}64 \\ 0{,}21x_1+0{,}27x_2+1{,}22x_3=1{,}85 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 1{,}25x_1-0{,}72x_2+1{,}38x_3=0{,}88 \\ -0{,}72x_1+1{,}45x_2-2{,}18x_3=1{,}72 \\ 1{,}38x_1-2{,}18x_2+0{,}93x_3=-0{,}72 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 1{,}16x_1+0{,}83x_2-0{,}66x_3=2{,}21 \\ 0{,}45x_1-0{,}54x_2+0{,}83x_3=-0{,}41 \\ 0{,}32x_1+0{,}28x_2+1{,}06x_3=1{,}02 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 1{,}14x_1+0{,}34x_2-1{,}84x_3=1{,}11 \\ -2{,}07x_1-0{,}84x_2+0{,}56x_3=2{,}48 \\ 1{,}64x_1+0{,}43x_2-0{,}67x_3=-1{,}83 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 0{,}53x_1-0{,}75x_2+1{,}83x_3=0{,}68 \\ -0{,}75x_1+0{,}68x_2-1{,}19x_3=0{,}95 \\ 1{,}83x_1-1{,}19x_2+2{,}15x_3=1{,}27 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 1{,}56x_1+0{,}42x_2-1{,}54x_3=-0{,}88 \\ 2{,}42x_1+1{,}02x_2+0{,}32x_3=2{,}44 \\ 1{,}26x_1+1{,}32x_2-0{,}25x_3=1{,}61 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 4{,}25x_1-1{,}48x_2+0{,}73x_3=1{,}44 \\ -1{,}48x_1+1{,}73x_2-1{,}85x_3=2{,}73 \\ 0{,}73x_1-1{,}85x_2+1{,}93x_3=-0{,}64 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 1{,}11x_1+1{,}67x_2+2{,}02x_3=1{,}82 \\ 2{,}45x_1+2{,}41x_2+1{,}15x_3=1{,}93 \\ -1{,}14x_1-1{,}17x_2+1{,}26x_3=2{,}18 \end{cases}$

Тема 2. Методы, основанные на разложении матриц

2.1 Схема Холецкого

Используем для решения системы (1) теорему о разложении невырожденной квадратной матрицы в произведение нижней и верхней треугольных матриц.

Теорема 1. Если главные миноры матрицы A отличны от нуля:

$$a_{1,1}\neq 0,\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}\neq 0,\quad \ldots,\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то матрица A представима в виде

$$A=B\cdot C, \tag{11}$$

где B и C – соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы.

Разложение (11) не может быть единственным. Если взять произвольную диагональную матрицу D с элементами, отличными от нуля, то вместе с равенством $A=B\cdot C$ справедливо также равенство $A=(B\cdot D^{-1})\cdot(D\cdot C)$. Поэтому диагональные элементы одной из матриц B и C можно задавать произвольными, отличными от нуля. Зафиксируем элементы главной диагонали матрицы C, положив $c_{i,i}=1,\ i=\overline{1,n}$. В этом случае разложение имеет вид

$$\begin{cases} b_{i,1}=a_{i,1},\quad i=\overline{1,n};\quad c_{1,i}=\dfrac{a_{1,i}}{b_{1,1}},\quad i=\overline{2,n} \\ c_{i,j}=\dfrac{a_{i,j}-\sum\limits_{p=1}^{i-1} b_{i,p}c_{p,j}}{b_{i,i}},\quad i=\overline{2,n},\quad j=\overline{i+1,n},\ (j>i>1)\ . \\ b_{i,j}=a_{i,j}-\sum\limits_{p=1}^{j-1} b_{i,p}c_{p,j},\quad j=\overline{2,n},\quad i=\overline{j,n},\ (i\geq j>1) \end{cases} \tag{12}$$

Учитывая разложение (11), система (1) принимает вид $B \cdot Cx = b$. Тогда вектор неизвестных x можно найти из цепочки матричных уравнений

$$Cx = y, \ By = b. \tag{13}$$

Вектор y находится из системы с нижней треугольной матрицей

$$\begin{cases} b_{1,1}y_1 & = b_1 \\ b_{2,1}y_1 + b_{2,2}y_2 & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \ldots + b_{n,n}y_n & = b_n \end{cases}$$

по формулам $y_1 = \dfrac{b_1}{b_{1,1}}$, $y_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{p=1}^{i-1} b_{i,p}y_p}{b_{i,i}}$, $i > 1$. Определив вектор y, находим вектор неизвестных из системы с верхней треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,2}x_2 + c_{1,3}x_3 + \ldots + c_{1,n}x_n = y_1 \\ \qquad\quad x_2 + c_{2,3}x_3 + \ldots + c_{2,n}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = y_n \end{cases}.$$

Вычисление проводится по формулам, аналогичным формулам для обратного хода схемы единственного деления Гаусса:

$$x_n = y_n, \ \ x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{i,j}x_j, \ \ i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Описанный метод решения систем линейных алгебраических уравнений называется схемой Холецкого.

2.2 Метод квадратного корня

Этот метод используется для решения систем линейных алгебраических уравнений с эрмитовой невырожденной матрицей A. Матрица A называется эрмитовой, если она совпадает со своей комплексно-сопряженной транспонированной матрицей, т. е. $A^* = A$. Среди прямых методов этот метод является самым быстродействующим и особенно удобным для решения систем уравнений с ленточной матрицей, у которой $a_{i,j} = 0$ при $|i - j| > m$, где $m << n$.

Будем искать разложение действительной матрицы A системы (1) в виде

$$A = S' \cdot D \cdot S, \tag{14}$$

где

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,n} \\ 0 & s_{2,2} & \dots & s_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n,n} \end{pmatrix},$$

D – диагональная матрица с элементами $d_i = \pm 1$.

После перемножения матриц получаем

$$a_{i,j} = s_{1,i}s_{1,j}d_1 + s_{2,i}s_{2,j}d_2 + \ldots + s_{i,i}s_{i,j}d_i,\ i < j,$$

$$a_{i,i} = s_{1,i}^2 d_1 + s_{2,i}^2 d_2 + \ldots + s_{i,i}^2 d_i,\ i = j.$$

Потребуем, чтобы элементы $s_{i,i}$ были положительными числами. Тогда получим

$$\begin{cases} d_1 = \operatorname{sign}(a_{1,1}),\ s_{1,1} = \sqrt{|a_{1,1}|} \\ s_{1,j} = \dfrac{a_{1,j}}{s_{1,1}d_1}, \quad j = \overline{2,n} \\ d_i = \operatorname{sign}\left(a_{i,i} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{p,p}^2 d_p\right) \\ s_{i,i} = \sqrt{\left|a_{i,i} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{p,i}^2 d_p\right|},\ i > 1 \\ s_{ij} = \dfrac{a_{i,j} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{p,i}s_{p,j}d_p}{s_{i,i}d_i},\ j > i \end{cases}. \tag{15}$$

Таким образом, разложение (14) существует и определяется формулами (15). Тогда решение системы (1) сводится к решению двух систем с треугольными матрицами

$$S' \cdot Dy = b,\ Sx = y.$$

Первая система имеет вид

$$\begin{cases} s_{1,1}d_1y_1 = b_1 \\ s_{1,2}d_1y_1 + s_{2,2}d_2y_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{1,n}d_1y_1 + s_{2,n}d_2y_2 + \ldots + s_{n,n}d_ny_n = b_n \end{cases}$$

и ее решение находится по формулам

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{1,1}d_1}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{p,i}d_py_p}{s_{i,i}d_i}, \quad i > 1.$$

Вторая система

$$\begin{cases} s_{1,1}x_1 + s_{1,2}x_2 + s_{1,3}x_3 + \ldots + s_{1,n}x_n = y_1 \\ s_{2,2}x_2 + s_{2,3}x_3 + \ldots + s_{2,n}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

дает решение исходной системы (1)

$$x_n = \frac{y_n}{s_{1,1}}, \; x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} s_{i,j}x_j}{s_{i,i}}, \; i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Если матрица A является положительно определенной (все главные миноры положительны), то $D = E$ и $A = S' \cdot S$. Формулы разложения имеют в этом случае вид

$$\begin{cases} s_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}, \; s_{1j} = \dfrac{a_{1,j}}{s_{1,1}}, \; j = \overline{2,n} \\ s_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{p,i}^2}, \; i > 1 \\ s_{i,j} = \dfrac{a_{i,j} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{p,i}s_{pj}}{s_{i,i}}, \; j > i \end{cases}.$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений с вещественной матрицей порядка n методом квадратного корня необходимо выполнить $\frac{n^3+9n^2+8n}{6}$ операций умножения и деления и n извлечений квадратного корня.

2.3 Метод отражений

Этот метод основан на разложении матрицы A системы (1) в произведение унитарной матрицы на верхнюю треугольную. Матрица A называется унитарной, если она удовлетворяет уравнению $A \cdot A^* = E$, где A^* – матрица, сопряженная с A. Вещественные унитарные матрицы называются ортогональными.

По своей структуре метод отражений близок к методу Гаусса, но исключение проводится с помощью матриц отражения, которые являются унитарными и эрмитовыми. Достоинством метода отражений является единая схема вычислительного процесса, не зависящая от структуры матрицы.

Теорема 2. Пусть s и l произвольные вектор-столбцы, причем вектор l имеет единичную длину. Тогда найдется такой вектор w, что построенная по нему матрица отражения $U = E - 2ww'$ переведет вектор s в вектор, коллинеарный вектору l, т. е. $Us = \alpha l$.

Вектор w строится по правилу

$$w = \frac{1}{\rho}(s - \alpha l), \tag{16}$$

где

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}, \arg\alpha = \arg(s, l) - \pi, \rho = \sqrt{(s - \alpha l, s - \alpha l)} = \sqrt{2|\alpha|^2 + 2|\alpha|| s, l |}.$$

Будем преобразовывать расширеную матрицу системы по правилу

$$A_{k+1} = U_{k+1} A_k, \ k = 0, 1, \ldots, n-2$$

с помощью умножения слева на последовательность матриц отражения $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$. Для построения матрицы U_1 на первом шаге метода в качестве вектора s берется первый столбец расширенной матрицы, а в качестве вектора l – координатный вектор $l = (1, 0, 0, \ldots, 0)'$. В силу выбора векторов s и l все координаты первого столбца расширенной матрицы, кроме первой, после выполнения первого шага метода будут равны нулю.

Пусть уже построена матрица A_k, у которой

$$a_{i,j}^{(k)}=0, \quad i>j, \quad j=\overline{1,k}.$$

Теперь в качестве s и l берутся вектора

$$s=(0,\ldots,0,\,a_{k+1,k+1}^{(k)},\,a_{k+2,k+1}^{(k)},\ldots,\,a_{n,k+1}^{(k)})',\ l=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)',$$

где в векторе l единица стоит на $k+1$-м месте.

После выполнения k-го шага метода отражений получим матрицу A_{k+1}, у которой все элементы, стоящие ниже главной диагонали, в первых $k+1$-м столбцах будут равны нулю. Невозможность выполнения очередного шага связана только с равенством нулю вектора s, а это невозможно, так как матрица A является невырожденной.

После $(n-1)$ шага получим матрицу, первые n столбцов которой образуют верхнюю треугольную матрицу L. Система уравнений, соответствующая полученной расширенной матрице, равносильна исходной системе (1). Значения неизвестных находятся аналогично обратному ходу метода Гаусса

$$x_n=-\frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}, \quad x_i=-\frac{a_{i,n+1}^{(n-1)}+\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_{i,j}^{(n-1)}x_j}{a_{n,n}(n-1)},\ i=n-1,n-2,\ldots,1.$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений методом отражений необходимо выполнить $\dfrac{4n^3+27n^2+5n}{6}$ операций умножения и деления, а также $n-1$ извлечений квадратных корней.

Пример.

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом отражений

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=6 \\ 2x_1-x_2+3x_3=11 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-7 \end{cases}.$$

Решение. По системе уравнений составим матрицу

$$A^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. $s=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $l=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $|\alpha|=\sqrt{(s,s)}=\sqrt{9}=3$, $(s,l)=1$,

$\arg\alpha=\arg(s,l)-\pi=0-\pi=-\pi$, $\alpha=-3$, $\rho=\sqrt{2|\alpha|^2+2|\alpha||(s,l)|}=\sqrt{24}=4{,}899\,0$,

$$w=\frac{1}{\rho}(s-\alpha l)=\frac{1}{4{,}899\,0}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0{,}816\,5\\0{,}408\,2\\0{,}408\,2\end{pmatrix},$$

$$U=E-2ww'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0{,}816\,5\\0{,}408\,2\\0{,}408\,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}816\,5&0{,}408\,2&0{,}408\,2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-0{,}333\,3&-0{,}666\,7&-0{,}666\,7\\-0{,}666\,7&0{,}666\,7&-0{,}333\,3\\-0{,}666\,7&-0{,}333\,3&0{,}666\,7\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{(1)}=U\cdot A^{(0)}=\begin{pmatrix}-3{,}000\,0&-0{,}666\,7&0{,}333\,3&-4{,}666\,7\\0&-0{,}333\,3&2{,}666\,7&5{,}666\,7\\0&3{,}666\,7&-4{,}333\,3&-12{,}333\,3\end{pmatrix}.$$

Шаг 2. $s=\begin{pmatrix}0\\-0{,}333\,3\\3{,}666\,7\end{pmatrix}$, $l=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $|\alpha|=\sqrt{(s,s)}=\sqrt{13{,}555\,7}=3{,}681\,8$,

$$(s,l)=-0{,}333\,3,$$

$\arg\alpha=\arg(s,l)-\pi=\pi-\pi=0$, $\alpha=3{,}681\,8$, $\rho=\sqrt{2|\alpha|^2+2|\alpha||(s,l)|}=5{,}437\,4$,

$$w=\frac{1}{\rho}(s-\alpha l)=\frac{1}{5{,}437\,4}\left(\begin{pmatrix}0\\-0{,}333\,3\\3{,}666\,7\end{pmatrix}-3{,}681\,8\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-0{,}738\,4\\0{,}674\,3\end{pmatrix},$$

$$U = E - 2ww' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}7384 \\ 0{,}6743 \end{pmatrix} \cdot \; 0 \quad -0{,}7384 \quad 0{,}6743 \; =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0905 & 0{,}9959 \\ 0 & 0{,}9959 & 0{,}0905 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{(2)} = U \cdot A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3{,}0000 & -0{,}6667 & 0{,}3333 & -4{,}6667 \\ 0 & 3{,}6818 & -4{,}5570 & -12{,}7957 \\ 0 & 0 & 2{,}2634 & 4{,}5268 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Исходная система преобразована к системе с верхней треугольной матрицей. Пользуясь обратным ходом метода Гаусса, находим $x_1 = 2{,}0000$, $x_2 = -1{,}0000$, $x_3 = 2{,}0000$.

2.4 Метод вращений

Вещественные унитарные матрицы

$$T_{ij}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \cos\varphi & \dots & -\sin\varphi & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sin\varphi & \dots & \cos\varphi & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

называются элементарными матрицами вращения или матрицами простого поворота. При умножении матрицы A слева на матрицу $T_{ij}(\varphi)$ получим матрицу A_1, у которой изменятся в отличие от матрицы A только i-я и j-я строки. Изменение элементов i-й и j-й строк осуществляется по формулам

$$\begin{cases} a_{i,p}^{(1)} = \cos\varphi \cdot a_{i,p} - \sin\varphi \cdot a_{j,p} \\ a_{j,p}^{(1)} = \sin\varphi \cdot a_{i,p} + \cos\varphi \cdot a_{j,p} \end{cases}, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \qquad (17)$$

Всегда можно подобрать угол поворота φ так, чтобы элемент $a_{i,p}^{(1)}$ оказался равным нулю. Для этого нужно взять

$$\cos\varphi = \frac{a_{i,p}}{\sqrt{a_{i,p}^2 + a_{j,p}^2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{a_{j,p}}{\sqrt{a_{i,p}^2 + a_{j,p}^2}}, \qquad (18)$$

если $\sqrt{a_{i,p}^2 + a_{j,p}^2} \neq 0$, и $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$ в противном случае.

Теорема 3. Любая действительная матрица преобразуется в верхнюю треугольную матрицу после умножения слева на конечную цепочку матриц простого поворота $T_{ij}(\varphi)$.

Рассмотрим систему (1) и построим для матрицы A системы унитарную матрицу U так, чтобы матрица UA преобразованной системы стала верхней треугольной. Тогда система преобразуется к виду $UAx = Ub$.

Матрица U представляет собой произведение унитарных матриц простого поворота $T_{ij}(\varphi)$. Матрица $T_{ij}(\varphi)$ строится так, чтобы после умножения обнулить элемент $a_{j,i}$, стоящий под главной диагональю. В этом случае угол поворота выбирается по формулам (18).

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом вращений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}.$$

Решение. По системе уравнений составим матрицу

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 17 \\ 1 & 5 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. В матрице $A^{(0)}$ обнулим элемент $a_{2,1}^{(0)}$. Для этого возьмем $i = 1$, $j = 2$, $p = 1$ и построим матрицу вращений U_1. Получаем

$$\cos\varphi = \frac{a_{1,1}}{\sqrt{a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2}} = 0{,}894\,4\,, \quad \sin\varphi = -\frac{a_{2,1}}{\sqrt{a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2}} = -0{,}447\,2\,,$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}894\,4 & 0{,}447\,2 & 0 \\ -0{,}447\,2 & 0{,}894\,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{(1)} = U_1 A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2{,}236\,1 & 1{,}341\,6 & 3{,}130\,5 & 12{,}522\,0 \\ 0 & 4{,}919\,4 & 2{,}683\,3 & -12{,}969\,2 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Обнулим элемент $a_{3,1}^{(1)}$ в матрице $A^{(1)}$. Для этого берем $i = 1$, $j = 3$, $p = 1$ и строим матрицу U_2. Имеем

$$\cos\varphi = \frac{a_{1,1}}{\sqrt{a_{1,1}^2 + a_{3,1}^2}} = 0{,}597\,6\,, \quad \sin\varphi = -\frac{a_{3,1}}{\sqrt{a_{1,1}^2 + a_{3,1}^2}} = -0{,}801\,8\,,$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0{,}597\,6 & 0 & 0{,}801\,8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}801\,8 & 0 & 0{,}597\,6 \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)} = U_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3{,}741\,7 & 0 & 2{,}672\,6 & 15{,}501\,2 \\ 0 & 4{,}919\,4 & 2{,}683\,3 & -12{,}969\,2 \\ 0 & -1{,}673\,3 & -1{,}912\,4 & -4{,}063\,8 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Обнулим элемент $a_{3,2}^{(2)}$ в матрице $A^{(2)}$. Для этого берем $i = 2$, $j = 3$, $p = 2$ и строим матрицу U_2. Имеем

$$\cos\varphi = \frac{a_{2,2}}{\sqrt{a_{2,2}^2 + a_{3,2}^2}} = 0{,}946\,7\,, \quad \sin\varphi = -\frac{a_{3,2}}{\sqrt{a_{2,2}^2 + a_{3,2}^2}} = 0{,}322\,0\,,$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}946\,7 & -0{,}322\,0 \\ 0 & 0{,}322\,0 & 0{,}946\,7 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = U_3 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3{,}7417 & 0 & 2{,}6726 & 15{,}5012 \\ 0 & 5{,}1962 & -1{,}9245 & -10{,}9697 \\ 0 & 0 & -2{,}6746 & -8{,}0238 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Исходная система преобразована к системе с верхней треугольной матрицей. Пользуясь обратным ходом метода Гаусса, находим $x_1 = 2{,}0000$, $x_2 = -1{,}0000$, $x_3 = 3{,}0000$.

Вопросы для самоконтроля

1 В чем сущность схемы Холецкого? Приведите примеры.
2 В чем сущность метода квадратного корня? Приведите примеры
3 В чем сущность метода отражений? Приведите примеры.
4 В чем сущность метода вращений? Приведите примеры.

Практические задания

1 Решить систему линейных алгебраических уравнений по схеме Холецкого (таблица 2).

Таблица 2

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} 0{,}23x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}21x_3 = -1{,}24 \\ 0{,}04x_1 + 0{,}23x_2 + 0{,}06x_3 = 0{,}88 \\ 0{,}21x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}11x_3 = -0{,}62 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 \\ 0{,}5x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 \\ 2{,}4x_1 + 4{,}4x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 0{,}24x_1 - 0{,}48x_2 + 0{,}23x_3 = -0{,}39 \\ -0{,}48x_1 + 0{,}44x_2 + 0{,}31x_3 = -0{,}72 \\ 0{,}23x_1 + 0{,}31x_2 - 0{,}55x_3 = -0{,}56 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 0{,}13x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}33x_3 = -0{,}11 \\ 0{,}22x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}07x_3 = 0{,}33 \\ -0{,}33x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}78x_3 = -0{,}85 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 0{,}08x_1 - 0{,}03x_2 - 0{,}04x_3 = 1{,}2 \\ -0{,}03x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}08x_3 = -0{,}81 \\ -0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}21x_3 = 0{,}92 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0{,}22x_1 - 0{,}11x_2 + 0{,}31x_3 = -2{,}7 \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 - 0{,}22x_3 = 1{,}5 \\ 0{,}31x_1 - 0{,}22x_2 - 0{,}51x_3 = -1{,}2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3{,}12x_1 + 2{,}81x_2 + 1{,}94x_3 = 0{,}21 \\ 2{,}81x_1 + 3{,}15x_2 + 2{,}15x_3 = 2{,}12 \\ 1{,}94x_1 + 2{,}15x_2 - 4{,}87x_3 = 5{,}68 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2{,}71x_1 + 3{,}32x_2 + 1{,}33x_3 = 2{,}16 \\ 3{,}32x_1 - 1{,}74x_2 + 2{,}87x_3 = 1{,}67 \\ 1{,}33x_1 + 2{,}87x_2 - 1{,}72x_3 = 0{,}86 \end{cases}$

Окончание таблицы 2

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
9	$\begin{cases} 2,6x_1 - 1,5x_2 + 3,1x_3 = 1,4 \\ -1,5x_1 + 4,3x_2 + 4,1x_3 = 6,1 \\ 3,1x_1 + 4,1x_2 - 0,8x_3 = -3,6 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 0,71x_1 - 1,48x_2 + 0,43x_3 = -2,39 \\ -1,48x_1 - 0,94x_2 + 0,56x_3 = -1,72 \\ 0,43x_1 + 0,56x_2 - 1,85x_3 = 1,56 \end{cases}$
10	$\begin{cases} -1,13x_1 - 1,22x_2 + 1,33x_3 = -1,11 \\ -1,22x_1 - 2,63x_2 + 1,07x_3 = 1,33 \\ 1,33x_1 + 1,07x_2 - 2,18x_3 = -2,85 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2,08x_1 - 1,03x_2 - 1,32x_3 = 1,24 \\ -1,03x_1 - 2,27x_2 + 1,22x_3 = -2,81 \\ -1,32x_1 + 1,22x_2 - 1,21x_3 = 2,52 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 1,81x_1 - 1,31x_2 + 2,31x_3 = -1,7 \\ -1,31x_1 - 3,12x_2 - 1,22x_3 = 1,91 \\ 2,31x_1 - 1,22x_2 + 2,66x_3 = -2,4 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 1,14x_1 + 2,31x_2 + 1,54x_3 = -2,24 \\ 2,31x_1 - 2,15x_2 - 1,15x_3 = 3,19 \\ 1,54x_1 - 1,15x_2 - 3,87x_3 = 1,61 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 2,32x_1 - 2,32x_2 + 1,33x_3 = 2,54 \\ -2,32x_1 + 1,72x_2 + 2,37x_3 = -1,61 \\ 1,33x_1 + 2,37x_2 - 2,72x_3 = -2,86 \end{cases}$	18	$\begin{cases} -1,3x_1 + 0,91x_2 - 1,34x_3 = 1,5 \\ 0,91x_1 - 1,8x_2 + 6,72x_3 = 2,34 \\ -1,34x_1 + 6,72x_2 - 2,21x_3 = -1,14 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2,6x_1 - 1,8x_2 - 2,7x_3 = 2,8 \\ -1,8x_1 - 1,6x_2 + 1,91x_3 = -1,4 \\ -2,7x_1 + 1,91x_2 - 2,3x_3 = 3,76 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 3,7x_1 - 1,9x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ -1,9x_1 - 1,63x_2 + 6,54x_3 = -1,6 \\ -0,5x_1 + 6,54x_2 - 3,3x_3 = 1,34 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 2,83x_1 - 6,71x_2 + 2,2x_3 = 3,23 \\ -6,71x_1 + 1,34x_2 + 1,7x_3 = 3,89 \\ 2,2x_1 + 1,7x_2 - 4,5x_3 = -1,62 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 1,21x_1 - 1,25x_2 + 4,1x_3 = 0,51 \\ -1,25x_1 - 3,9x_2 + 5,48x_3 = 1,33 \\ +4,1x_1 + 5,48x_2 - 1,5x_3 = 1,74 \end{cases}$

2 Решить систему линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня (таблица 2).

3 Решить систему линейных алгебраических уравнений методом отражений (таблица 2).

4 Решить систему линейных алгебраических уравнений методом вращений (таблица 2).

Тема 3. Методы, основанные на построении вспомогательной системы векторов

3.1 Метод ортогонализации

Этот метод используется для решения систем с произвольной невырожденной матрицей, но по скорости уступает многим прямым методам примерно в полтора – три раза. Метод основан на построении вспомогательной системы векторов, связанных с матрицей исходной системы уравнений и ортогональных в некоторой метрике.

Рассмотрим систему (1) и запишем ее в виде

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + a_{n,n+1} = 0 \end{cases}, \tag{19}$$

где $a_{i,n+1} = -b_i, \quad i = \overline{1,n}$.

Обозначим $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n+1})', \quad i = \overline{1,n}, \quad y = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)'$. Тогда система (19) перепишется в виде

$$\begin{cases} (a_1, y) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_n, y) = 0 \end{cases}.$$

Решение системы уравнений с невырожденной матрицей A сводится к нахождению такого вектора y, который имеет последнюю координату, равную единице и ортогонален к линейно независимым векторам $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ортогональность вектора y к векторам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ влечет за собой ортогональность ко всему подпространству P_n, натянутому на них, и, следовательно, к любому его базису. И наоборот, ортогональность вектора y к некоторому базису подпространства P_n влечет ортогональность ко всем векторам a_i. Поэтому для решения системы достаточно построить ненулевой вектор z, ортогональный к какому-нибудь базису подпространства P_n. Если z_{n+1} – последняя координата вектора z, то $y=\frac{z}{z_{n+1}}$.

Добавим к системе векторов $a_1,a_2,\ldots,a_n$ линейно независимый с ними вектор $a_{n+1}=(0,0,\ldots,1)'$, а затем будем последовательно строить систему ортонормированных векторов $b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}$, что для всех $k=\overline{1,n+1}$ векторы $b_1,b_2,\ldots,b_k$ являются базисом подпространства P_k, натянутого на вектора $a_1,a_2,\ldots,a_k$. В этом случае вектор b_{n+1} и будет искомым вектором z.

Применим правило Шмидта для построения ортонормированного базиса пространства, натянутого на заданные линейно независимые векторы. Обозначим через $u_1,u_2,\ldots,u_k$ – ортогональный базис подпространства P_k, а через $b_1,b_2,\ldots,b_k$ – ортонормированный в евклидовой метрике базис того же подпространства. Так как векторы b_k нормированы, то их можно представить в виде

$$b_k=\frac{u_k}{\sqrt{(u_k,u_k)}},\ k=\overline{1,n+1}. \qquad (20)$$

На первом шаге метода положим $u_1=a_1$, $b_1=\frac{u_1}{\sqrt{(u_1,u_1)}}$. Пусть для некоторого шага $k>1$ уже построен ортогональный базис $u_1,u_2,\ldots,u_k$ и ортонормированный базис $b_1,b_2,\ldots,b_k$ подпространства P_k. Вектор u_{k+1} будем искать как линейную комбинацию векторов $a_{k+1},b_1,b_2,\ldots,b_k$, $u_{k+1}=a_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}c_ib_i$.

Условие ортогональности вектора u_{k+1} к ортогональным векторам $u_1,u_2,\ldots,u_k$ или, что то же самое, к векторам $b_1,b_2,\ldots,b_k$ дает $c_i=-(a_{k+1},b_i)$. Поэтому

$$u_{k+1}=a_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}(a_{k+1},b_i)b_i. \qquad (21)$$

Таким образом, с помощью этого итерационного процесса и соотношения (20) строится ортонормированная система векторов $b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}$. Векторы $b_1,b_2,\ldots,b_n$ являются базисом подпространства P_n. Следовательно, решение исходной системы имеет вид

$$x_i=\frac{b_{n+1}^{(i)}}{b_{n+1}^{(n+1)}},\qquad i=\overline{1,n},$$

где $b_{n+1}^{(i)}$ и $b_{n+1}^{(n+1)}$ – соответственно i-я и $(n+1)$-я координаты вектора b_{n+1}.

Метод ортогонализации легко реализуется на ЭВМ и для решения системы n уравнений требует n^3+n^2+n операций умножения и деления и n извлечений квадратного корня. Однако удовлетворительные по точности результаты данный метод дает не для всех матриц A. Это связано с неустойчивостью рекуррентного процесса (21), нарушающей ортогональность векторов $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$. Чтобы избежать этого недостатка, используется алгоритм Уилкинсона. В соответствии с этим алгоритмом векторы u_{k+1} вычисляются из соотношения

$$u_{k+1}=\lim_{s\to\infty} u_{k+1}^{(s)},$$

где

$$u_{k+1}^{(s)}=u_{k+1}^{(s-1)}-\sum_{i=1}^{k}(u_{k+1}^{(s-1)}, b_i)\cdot b_i\,, \quad u_{k+1}^{(0)}=a_{k+1}.$$

При $u_{k+1}=u_{k+1}^{(1)}$ метод ортогонализации принимает обычный вид и может быть неустойчивым. Значительно лучшие результаты дает $u_{k+1}=u_{k+1}^{(2)}$. Обычно же для достижения хорошей точности достаточно сделать две–три итерации.

Пример. Методом ортогонализации решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3=-1 \\ -x_1+6x_2-2x_3=9 \\ 2x_1-2x_2+5x_3=-10 \end{cases}.$$

Решение. По системе уравнений составим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. $u_1=a_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $\sqrt{(u_1,u_1)}=\sqrt{22}=4{,}690\,4$,

$$b_1=\frac{u_1}{\sqrt{(u_1,u_1)}}=\begin{pmatrix}0{,}213\,2 & -0{,}426\,4 & 0{,}213\,2 & 0{,}852\,8\end{pmatrix}.$$

Шаг 2. $\quad u_2 = a_2 + c_1 \cdot b_1,\ c_1 = -(a_2, b_1) = -4{,}050\,8,$

$$u_2 = \;2 \quad -1 \quad 3 \quad 3 \; - 4{,}050\,8 \cdot \; 0{,}213\,2 \quad -0{,}426\,4 \quad 0{,}213\,2 \quad 0{,}852\,8 \; =$$

$$= \;1{,}136\,4 \quad 0{,}727\,3 \quad 2{,}136\,4 \quad -0{,}454\,6 \;,\ \sqrt{(u_2, u_2)} = \sqrt{6{,}591\,0} = 2{,}567\,3,$$

$$b_2 = \frac{u_2}{\sqrt{(u_2, u_2)}} = \; 0{,}442\,6 \quad 0{,}283\,3 \quad 0{,}832\,2 \quad -0{,}177\,1 \; .$$

Шаг 3. $\quad u_3 = a_3 + c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2,\quad c_1 = -(a_3, b_1) = 11{,}299\,6,$

$$c_2 = -(a_3, b_2) = 0{,}088\,5,$$

$$u_3 = \;1 \quad 3 \quad -4 \quad -11 \; + 11{,}299\,6 \cdot \; 0{,}213\,2 \quad -0{,}426\,4 \quad 0{,}213\,2 \quad 0{,}852\,8 \; +$$

$$+ 0{,}088\,5 \cdot \; 0{,}442\,6 \quad 0{,}283\,3 \quad 0{,}832\,2 \quad -0{,}177\,1 \; =$$

$$= \;3{,}448\,3 \quad -1{,}793\,1 \quad -1{,}517\,2 \quad -1{,}379\,3 \;,\ \sqrt{(u_3, u_3)} = \sqrt{19{,}310\,8} = 4{,}394\,4,$$

$$b_3 = \frac{u_3}{\sqrt{(u_3, u_3)}} = \; 0{,}784\,7 \quad -0{,}408\,1 \quad -0{,}345\,3 \quad -0{,}313\,9 \; .$$

Шаг 4. $\quad u_4 = a_4 + c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2 + c_3 b_3,\quad c_1 = -(a_4, b_1) = -0{,}852\,8,$

$$c_2 = -(a_4, b_2) = 0{,}177\,1,\ c_3 = -(a_4, b_3) = 0{,}313\,9,$$

$$u_3 = \;0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \; - 0{,}852\,8 \cdot \; 0{,}213\,2 \quad -0{,}426\,4 \quad 0{,}213\,2 \quad 0{,}852\,8 \; +$$

$$+ 0{,}177\,1 \cdot \; 0{,}442\,6 \quad 0{,}283\,3 \quad 0{,}832\,2 \quad -0{,}177\,1 \; +$$

$$+ 0{,}313\,9 \cdot \; 0{,}784\,7 \quad -0{,}408\,1 \quad -0{,}345\,3 \quad -0{,}313\,9 \; =$$

$$= \;0{,}142\,9 \quad 0{,}285\,7 \quad -0{,}142\,9 \quad 0{,}142\,9 \;,\ \sqrt{(u_4, u_4)} = \sqrt{0{,}142\,9} = 0{,}378\,0,$$

$$b_4 = \frac{u_4}{\sqrt{(u_4, u_4)}} = \; 0{,}378\,0 \quad 0{,}755\,9 \quad -0{,}378\,0 \quad 0{,}378\,0 \; .$$

Разделив вектор b_4 на последнюю его координату, получим вектор $b_4 = \; 1{,}000\,0 \quad 2{,}000\,0 \quad -1{,}000\,0 \quad 1{,}000\,0$, первые три координаты которого дают решение исходной системы, то есть $x_1 = 1{,}000\,0$, $x_2 = 2{,}000\,0$, $x_3 = -1{,}000\,0$.

3.2 Метод сопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов предназначен для решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Матрица A называется положительно определенной, если скалярное произведение $(Ax, x)>0$ для всех ненулевых векторов x. Для того чтобы матрица A была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (1) с положительно определенной симметричной матрицей. Пусть x^* – решение этой системы, в этом случае x^* дает минимум $f(x)=(Ax,x)-2(b,x)$. Действительно, имеем решение системы линейных уравнений (1) с симметричной положительно определенной матрицей A, что эквивалентно решению задачи минимизации функции: $F(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x).$ В самом деле, функция $F(x)$ достигает своего минимального значения тогда и только тогда, когда ее градиент равен нулю:

$$\nabla F(x) = Ax - b = 0.$$

Таким образом, решение системы (1) можно искать как решение задачи безусловной минимизации функции *f(x)*. Будем искать этот минимум итерационным методом. Для этого предположим, что заданы два вектора x_1 и Δ_1. Последовательные приближения x_{k+1} к решению системы (1) будем строить по формулам

$$\Delta_{k+1} = \alpha_k \Delta_k + \beta_k r_k, \tag{22}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta_{k+1}, \tag{23}$$

где

$$r_k = Ax_k - b. \tag{24}$$

Параметры α_k и β_k будем определять из условия минимума функционала $f(x)$ в плоскости, проходящей через точку x_k и натянутой на векторы Δ_k и r_k, т. е. минимум функционала ищется на множестве $x = x_k + \alpha_k \Delta_k + \beta_k r_k$. Преобразуем наш функционал на этом множестве

$$f(x)=(Ax,x)-2(b,x)=(A(x_k+\alpha_k\Delta_k+\beta_k r_k), x_k+\alpha_k\Delta_k+\beta_k r_k)-$$

$$-2(b,x_k+\alpha_k\Delta_k+\beta_k r_k)=(Ax_k,x_k)+\alpha_k(Ax_k,\Delta_k)+\beta_k(Ax_k,r_k)+\alpha_k(A\Delta_k,x_k)+$$

$$+\alpha_k^2(A\Delta_k,\Delta_k)+\alpha_k\beta_k(A\Delta_k,r_k)+\beta_k(Ar_k,x_k)+\alpha_k\beta_k(Ar_k,\Delta_k)+\beta_k^2(Ar_k,r_k)-$$

$$-2(b,x_k)-2\alpha_k(b,\Delta_k)-2\beta_k(b,r_k).$$

Для определения минимума $f(x)$ используем необходимое условие экстремума функции. Продифференцируем $f(x)$ по α_k и β_k и приравняем к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = (Ax_k, \Delta_k) + (A\Delta_k, x_k) + 2\alpha_k (A\Delta_k, \Delta_k) + \beta_k (A\Delta_k, r_k) + \beta_k (Ar_k, \Delta_k) -$$

$$-2(b, \Delta_k) = 2(Ax_k, \Delta_k) + 2\alpha_k (A\Delta_k, \Delta_k) + 2\beta_k (Ar_k, \Delta_k) - 2(b, \Delta_k) =$$

$$= 2(A(x_k + \alpha_k \Delta_k + \beta_k r_k), \Delta_k) - 2(b, \Delta_k) = 2(Ax_{k+1}, \Delta_k) - 2(b, \Delta_k) =$$

$$= 2(Ax_{k+1} - b, \Delta_k) = 2(r_{k+1}, \Delta_k) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_k} = (Ax_k, r_k) + (Ar_k, x_k) + \alpha_k (A\Delta_k, r_k) + \alpha_k (Ar_k, \Delta_k) + 2\beta_k (Ar_k, r_k) -$$

$$-2(b, r_k) = 2(Ax_k, r_k) + 2\alpha_k (A\Delta_k, r_k) + 2\beta_k (Ar_k, r_k) - 2(b, r_k) =$$

$$= 2(A(x_k + \alpha_k \Delta_k + \beta_k r_k), r_k) - 2(b, r_k) = 2(Ax_{k+1}, r_k) - 2(b, r_k) =$$

$$= 2(Ax_{k+1} - b, r_k) = 2(r_{k+1}, r_k) = 0.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$(r_{k+1}, \Delta_k) = 0,$$
$$(r_{k+1}, r_k) = 0. \tag{25}$$

Так как

$$r_{k+1} = Ax_{k+1} - b = A(x_k + \alpha_k \Delta_k + \beta_k r_k) - b = Ax_k - b + \alpha_k A\Delta_k + \beta_k Ar_k =$$

$$= r_k + \alpha_k A\Delta_k + \beta_k Ar_k,$$

то последнюю систему можно представить в виде

$$\begin{cases} \alpha_k (A\Delta_k, \Delta_k) + \beta_k (Ar_k, \Delta_k) = -(r_k, \Delta_k) \\ \alpha_k (A\Delta_k, r_k) + \beta_k (Ar_k, r_k) = -(r_k, r_k) \end{cases}.$$

Это система двух уравнений с двумя неизвестными α_k и β_k. Решая ее, получаем

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)(Ar_k, \Delta_k) - (r_k, \Delta_k)(Ar_k, r_k)}{(A\Delta_k, \Delta_k)(Ar_k, r_k) - (Ar_k, \Delta_k)^2},$$

$$\beta_k = \frac{(r_k, \Delta_k)(Ar_k, \Delta_k) - (r_k, r_k)(A\Delta_k, \Delta_k)}{(A\Delta_k, \Delta_k)(Ar_k, r_k) - (Ar_k, \Delta_k)^2}.$$

Покажем, что метод сопряженных градиентов всегда сходится к решению системы x^*. Учитывая (23)–(25) и ортогональность векторов r_i и Δ_i, получим

$$f(x_k)-f(x_{k+1})=(A(x_k-x^*),(x_k-x^*))-(Ax^*,x^*)-$$
$$-[(A(x_{k+1}-x^*),(x_{k+1}-x^*))-(Ax^*,x^*)]=(A(x_k-x^*),(x_k-x^*))-$$
$$-(A(x_{k+1}-x^*),(x_{k+1}-x^*))=(A(x_k-x^*),(x_k-x^*))-$$
$$-(A(x_k-x^*)+A\Delta_{k+1},(x_k-x^*)+\Delta_{k+1})=-(r_k,\Delta_{k+1})-(A\Delta_{k+1},x_k-x^*)-$$
$$-(A\Delta_{k+1},\Delta_{k+1})=-2(r_k,\Delta_{k+1})-(A\Delta_{k+1},\Delta_{k+1})=-2(r_k,\Delta_{k+1})-$$
$$-(r_{k+1}-r_k,\Delta_{k+1})=-(r_k,\Delta_{k+1})=-(r_k,\alpha_k\Delta_k+\beta_k r_k)=-\beta_k(r_k,r_k).$$

Так как векторы r_k и Δ_k ортогональны, то из выражения для коэффициента β_k имеем

$$-\beta_k=\frac{(r_k,r_k)(A\Delta_k,\Delta_k)}{(A\Delta_k,\Delta_k)(Ar_k,r_k)-(Ar_k,\Delta_k)^2}\geq\frac{(r_k,r_k)(A\Delta_k,\Delta_k)}{(A\Delta_k,\Delta_k)(Ar_k,r_k)}=\frac{(r_k,r_k)}{(Ar_k,r_k)}=$$
$$=\frac{1}{\dfrac{(Ar_k,r_k)}{(r_k,r_k)}}\geq\frac{1}{\lambda_{\max}},$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение матрицы A.

Окончательно получаем

$$f(x_k)-f(x_{k+1})\geq\frac{(r_k,r_k)}{\lambda_{\max}}=\frac{\|r_k\|^2}{\lambda_{\max}}>0.$$

Таким образом, последовательность $f(x_k$ монотонно убывает и ограничена снизу значением $f(x^*)=-(Ax^*,x^*)$. Так как всякая монотонно убывающая последовательность сходится, т. е. $f(x_k)\underset{k\to\infty}{\rightarrow}f(x^*)$, то по признаку Коши имеем $f(x_k)-f(x_{k+1})\underset{k\to\infty}{\rightarrow}0$. Тогда из последнего неравенства следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}(r_k,r_k)=0$, а это означает, что последовательность векторов x_k сходится к решению x^* системы (1).

Выберем начальные вектора x_1 и Δ_1 для метода сопряженных градиентов. Пусть x_0 – произвольный вектор. Построим вектор $x_1=x_0+\Delta_1$, где вектор $\Delta_1 \neq 0$ выбирается по направлению r_0 так, чтобы векторы r_1 и Δ_1 были ортогональными, т. е. $(r_1, \Delta_1) = 0$. Обозначим $\Delta_1 = \beta_0 r_0$. Тогда

$$(r_1, \Delta_1) = (Ax_1 - b, \Delta_1) = (A(x_0 + \Delta_1) - b, \Delta_1) = (A(x_0 + \beta_0 r_0) - b, \beta_0 r_0) =$$

$$= (Ax_0 - b + \beta_0 A r_0, \beta_0 r_0) = (r_0 + \beta_0 A r_0, \beta_0 r_0) = \beta_0 (r_0, r_0) + \beta_0^2 (A r_0, r_0).$$

Для выполнения условия ортогональности векторов r_1 и Δ_1 достаточно потребовать, чтобы $\beta_0 = -\dfrac{(r_0, r_0)}{(Ar_0, r_0)}$.

Можно показать, что при таком выборе векторов x_1 и Δ_1 итерации метода сопряженных градиентов обрываются не позднее, чем на n-м шаге, давая точное решение системы (1) (n– порядок системы). В сочетании с методом подавления компонент метод сопряженных градиентов позволяет находить решение за число итераций, значительно меньшее n.

Основной операцией метода сопряженных градиентов является вычисление произведений $A\Delta_k$ и Ar_k, причем ни в какие другие операции матрица A не входит. Поэтому максимальный порядок решаемых на ЭВМ систем уравнений зависит только от объема информации, необходимой для умножения матрицы A на вектор. Значит, применение метода сопряженных градиентов будет тем эффективнее, чем эффективнее составлена программа умножения матрицы на вектор.

Пример. Методом сопряженных градиентов решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -10 \end{cases}.$$

Решение.

Шаг 1. Возьмем произвольный вектор $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Построим векторы x_1 и Δ_1:

$$r_0 = Ax_0 - b = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}, \ (r_0, r_0) = 269,$$

$$Ar_0=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&6&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-10\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}54\\-89\\90\end{pmatrix},\ (Ar_0,r_0)=2240,$$

$$\beta_0=-\frac{(r_0,r_0)}{(Ar_0,r_0)}=-\frac{269}{2\,240}=-0{,}1201,\ \Delta_1=\beta_0 r_0=\begin{pmatrix}-0{,}6004\\1{,}2009\\-1{,}4411\end{pmatrix},$$

$$x_1=x_0+\Delta_1=\begin{pmatrix}0{,}3996\\1{,}2009\\-1{,}4411\end{pmatrix}.$$

Шаг 2.

$$r_1=Ax_1-b=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&6&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}3996\\1{,}2009\\-1{,}4411\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\9\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1{,}4848\\0{,}6879\\1{,}1920\end{pmatrix},$$

$$Ar_1=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&6&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1{,}4848\\0{,}6879\\1{,}1920\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4{,}2433\\3{,}2286\\1{,}6143\end{pmatrix},$$

$$A\Delta_1=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&6&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}6004\\1{,}2009\\-1{,}4411\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6{,}4848\\10{,}6879\\1{,}8080\end{pmatrix},$$

$$(r_1,r_1)=4{,}0987,\ (r_1,\Delta_1)=0,\ (Ar_1,\Delta_1)=4{,}0987,\ (Ar_1,r_1)=10{,}4458,$$

$$(A\Delta_1,\Delta_1)=32{,}3040,$$

$$\alpha_1=\frac{(r_1,r_1)(Ar_1,\Delta_1)-(r_1,\Delta_1)(Ar_1,r_1)}{(A\Delta_1,\Delta_1)(Ar_1,r_1)-(Ar_1,\Delta_1)^2}=0{,}0524,$$

$$\beta_1=\frac{(r_1,\Delta_1)(Ar_1,\Delta_1)-(r_1,r_1)(A\Delta_1,\Delta_1)}{(A\Delta_1,\Delta_1)(Ar_1,r_1)-(Ar_1,\Delta_1)^2}=-0{,}4129,$$

$$\Delta_2=\alpha_1\Delta_1+\beta_1 r_1=\begin{pmatrix}0{,}5817\\-0{,}2212\\-0{,}5677\end{pmatrix},\ x_2=x_1+\Delta_2=\begin{pmatrix}0{,}9812\\0{,}9797\\-2{,}0088\end{pmatrix}.$$

Шаг 3.

$$r_2=Ax_2-b=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&6&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}981\,2\\0{,}979\,7\\-2{,}008\,8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\9\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}072\,4\\-0{,}085\,3\\-0{,}040\,9\end{pmatrix},$$

$$Ar_2=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&6&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}072\,4\\-0{,}085\,3\\-0{,}040\,9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}286\,0\\-0{,}357\,5\\-0{,}178\,7\end{pmatrix},$$

$$A\Delta_2=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&6&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}581\,7\\-0{,}221\,2\\-0{,}567\,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}412\,5\\-0{,}773\,2\\-1{,}232\,9\end{pmatrix},$$

$$(r_2,r_2)=0{,}014\,2,\ (r_2,\Delta_2)=0,\ (Ar_2,\Delta_2)=0{,}014\,2,\ (Ar_2,r_2)=0{,}058\,5,$$

$$(A\Delta_2,\Delta_2)=1{,}692\,5,$$

$$\alpha_2=\frac{(r_2,r_2)(Ar_2,\Delta_2)-(r_2,\Delta_2)(Ar_2,r_2)}{(A\Delta_2,\Delta_2)(Ar_2,r_2)-(Ar_2,\Delta_2)^2}=0{,}002\,0,$$

$$\beta_2=\frac{(r_2,\Delta_2)(Ar_2,\Delta_2)-(r_2,r_2)(A\Delta_2,\Delta_2)}{(A\Delta_2,\Delta_2)(Ar_2,r_2)-(Ar_2,\Delta_2)^2}=-\,0{,}243\,0,$$

$$\Delta_3=\alpha_2\Delta_2+\beta_2r_2=\begin{pmatrix}0{,}018\,8\\0{,}020\,3\\0{,}008\,8\end{pmatrix},\qquad x_3=x_2+\Delta_3=\begin{pmatrix}1{,}000\,0\\1{,}000\,0\\-2{,}000\,0\end{pmatrix}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 В чем сущность метода ортогонализации? Приведите примеры.
2 В чем сущность метода сопряженных градиентов? Приведите примеры.
3 В чём состоит пошаговое выполнение алгоритмов?

Практические задания

1 Решить систему линейных алгебраических уравнений методом ортогонализации (таблица 2).

2 Решить систему линейных алгебраических уравнений методом сопряженных градиентов (таблица 2).

Тема 4. Итерационные методы решения СЛАУ

4.1 Метод простой итерации.
4.2 Метод Зейделя.

4.1 Метод простой итерации

При большом числе неизвестных линейной системы схема метода Гаусса, дающая точное решение, становится весьма сложной. В этих условиях для нахождения корней системы иногда удобнее пользоваться приближенными численными методами. Изложим здесь один из этих методов – метод итерации.

Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + a_{n,n+1} = 0 \end{cases}. \tag{26}$$

Введя в рассмотрение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix},$$

систему (26) коротко можно записать в виде матричного уравнения

$$Ax = b.$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), разрешим первое уравнение системы (26) относительно x_1, второе – относительно x_2 и т. д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \ \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \text{ при } \ i \neq j,$$

$$\alpha_{ij} = 0 \ \text{ при } \ i = j \quad (i, j = 1, 2, ... n).$$

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (27) можем записать в матричной форме

$$x = \beta + \alpha\, x. \tag{28}$$

Систему (27) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимаем столбец свободных членов $x^{(0)} = \beta$.

Далее последовательно строим матрицы-столбцы:

− первое приближение − $x^{(1)} = \beta + \alpha\, x^{(0)}$;

− второе приближение − $x^{(2)} = \beta + \alpha\, x^{(1)}$ и т. д.

Вообще говоря, любое $(k + 1)$-е приближение вычисляют по формуле

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha\, x^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Если последовательность приближений $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, ..., $x^{(k)}$ имеет предел $x = \lim x^{(k)}$ при $k \to 0$, то этот предел является решением системы (27). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (29), будем иметь:

$$\lim x^{(k+1)} = \beta + \lim x^{(k)}$$

или $x = \beta + \alpha\, x$, т. е. предельный вектор x является решением системы (28), а следовательно, и системы (26).

Заметим, что иногда выгоднее приводить систему (26) к виду (27) так, чтобы коэффициенты a_{u} не были равны нулю.

Метод последовательных приближений, определимых формулами (27) или (29), носит название *метода итерации.* Процесс итерации (29) хорошо сходится, т. е. число приближений, необходимых для получения корней системы (26) с заданной точностью, невелико, если элементы матрицы α малы по абсолютной величине. Иными словами, для успешного применения процесса итерации модули диагональных коэффициентов системы (26) должны быть велики по сравнению с модулями недиагональных коэффициентов этой системы (свободные члены при этом роли не играют).

Пример. Решить методом итерации систему

$$\begin{aligned} &4x_1 + 0{,}24\, x_2 - 0{,}08\, x_3 = 8, \\ &0{,}09\, x_1 + 3\, x_2 - 0{,}15\, x_3 = 9, \\ &0{,}04\, x_1 - 0{,}08\, x_2 + 4\, x_3 = 20. \end{aligned} \tag{30}$$

Решение. Здесь диагональные коэффициенты 4; 3; 4 системы значительно преобладают над остальными коэффициентами при неизвестных. Приведем эту систему к нормальному виду (27)

$$\begin{aligned} &x_1 = 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3, \\ &x_2 = 2 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3, \\ &x_3 = 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2. \end{aligned} \tag{31}$$

В матричной форме систему (31) можно записать так:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

За нулевые приближения корней системы (30) принимаем:

$$x_1^{(0)} = 2,\ x_2^{(0)} = 3,\ x_3^{(0)} = 5.$$

Подставляя эти значения в правые части уравнений (31), получим первые приближения корней:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 2 - 0{,}06 \cdot 3 + 0{,}02 \cdot 5 = 1{,}92; \\ x_2^{(1)} &= 3 - 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}05 \cdot 5 = 3{,}19; \\ x_3^{(1)} &= 5 - 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}02 \cdot 3 = 5{,}04. \end{aligned}$$

Далее, подставляя эти найденные приближения в формулу (31), получим последующие приближения корней (таблица 4).

Таблица 4 – Приближения корней

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,909 4	3,194 4	5,044 6
3	1,909 23	3,194 95	5,044 85

4.2 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации. Основная его идея заключается в том, что при вычислении (k + 1)-го приближения неизвестной x_i при $i > 1$ учитываются уже вычисленные ранее (k + 1)-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$. Таким образом, для системы (26) любое (k + 1)-е приближение для метода Зейделя вычисляют по формуле

$$x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Указанные условия сходимости для метода простой итерации остаются верными и для метода Зейделя. Обычно метод Зейделя даёт лучшую сходимость, чем метод простой итерации. Кроме того, метод Зейделя может оказаться более удобным при программировании, так как при вычислении $x_i^{(k+1)}$ нет необходимости хранить значения $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$.

Вопросы для самоконтроля

1 В чем сущность метода простой итерации? Приведите примеры.

2 В чем сущность метода Зейделя? Приведите примеры.

3 В чем отличия метода Зейделя и метода простой итерации?

4 Что можно взять в качестве начального приближения в методе простой итерации?

Практические задания

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (9+k)x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 35 + 3k \\ 2x_1 + (8+k)x_2 + 4x_3 = 22 + k \\ 3x_1 + 4x_2 + (12+k)x_3 = 37 + 2k \end{cases},$$

где $k = 0{,}02n$;

n – номер варианта.

а) методом простой итерации;

б) методом Зейделя.

Тема 5. Полная и частичная проблемы собственных значений

5.1 Постановка задачи. Прямой метод.
5.2 Метод А.Н. Крылова.

5.1 Постановка задачи. Прямой метод

Собственным значением (или *характеристическим числом)* квадратной матрицы A называется такое число λ, что для некоторого ненулевого вектора x имеет место равенство

$$Ax = \lambda x. \tag{32}$$

Любой ненулевой вектор x, удовлетворяющий этому равенству, называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим (или принадлежащим) собственному значению λ. Очевидно, что все собственные векторы матрицы определены с точностью до числового множителя.

Условием существования у однородной системы (32) ненулевого решения (для наглядности запишем эту систему в виде $(A - \lambda E)x = 0$ является требование

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение обычно называют *вековым* (или *характеристическим*) *уравнением* матрицы A. Такие уравнения часто встречаются в приложениях. Левая часть векового уравнения

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots, - p_n)$$

носит название *характеристического полинома* матрицы A. Старший коэффициент этого полинома равен $(-1)^n$. Иногда вместо характеристического полинома рассматривают полином, отличающийся от характеристического множителем $(-1)^n$. Этот полином

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots, - p_n$$

обычно называют *собственным многочленом* матрицы. Собственные значения матрицы являются корнями собственного многочлена. Совокупность всех собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A, где каждое собственное значение выписано столько раз, какова его кратность как корня собственного многочлена, называется *спектром* этой матрицы. Собственными же векторами матрицы A являются нетривиальные решения однородной системы (32), в которой вместо λ подставлены собственные значения λ_i матрицы. В том случае, когда для данного собственного значения система (32) имеет несколько линейно-независимых решений, этому собственному значению принадлежит несколько собственных векторов.

Задачу вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы A можно разбить на три естественных этапа:

1) построение собственного многочлена $P(\lambda)$ матрицы;

2) решение уравнения $P(\lambda)=0$ и нахождение собственных значений λ_i, $i=1, 2,.., n$ матрицы;

3) отыскание нетривиальных решений однородных систем $(A-\lambda_i E)x=0$, $i=1, 2.., n$, то есть нахождение собственных векторов матрицы.

Каждый из трех отмеченных этапов решения проблемы собственных значений представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу.

В самом деле, построение собственного многочлена $P(\lambda)$, например, связано с развертыванием определителя

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots, - p_n) = (-1)^n P(\lambda),$$

что представляет собой значительные технические трудности.

Все методы, как и в случае проблемы численного решения системы линейных алгебраических уравнений, можно разделить на точные и итерационные методы. К первой группе относятся методы, по которым сначала строят собственный многочлен матрицы (т. е. вычисляют его коэффициенты p_1, $p_2, \dots, p_n$), затем, находя его корни, получают собственные значения матрицы и уже по ним находят соответствующие собственные векторы. Такие методы приводят к точным значениям коэффициентов собственного многочлена.

В методах второй группы собственные значения матрицы определяются непосредственно, без обращения к собственному многочлену, при этом обычно одновременно вычисляются и соответствующие собственные векторы. Вычислительные схемы таких методов носят итерационный характер и применяются к решению так называемой частичной проблемы собственных значений.

Таким образом, задача отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы сводится к отысканию коэффициентов характеристического уравнения, определению его корней и к отысканию нетривиальных решений системы $Ax = X$, в которой вместо X рассматривают одно из найденных собственных значений.

Пример. Найти собственные числа и собственные вектора матрицы A методом непосредственного вычисления определителя ($\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение матрицы A, корнями которого являются собственные числа матрицы

$$|A - \lambda E| = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ -2 & 4-\lambda & 5 \\ 3 & 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Непосредственно вычислив определитель третьего порядка, имеем

$$(2-\lambda)(4-\lambda)(-1-\lambda) - 15 - 12 - 9(4-\lambda) - 10(2-\lambda) - 2(-1-\lambda) = 0,$$

откуда $\lambda^3 - 5\lambda^2 - 19\lambda + 89 = 0$. Полученное уравнение решаем методом Ньютона, предварительно отделив корни.

Для определения собственных векторов, соответствующих найденным собственным значениям, воспользуемся системой линейных уравнений, полученных из равенства $(A - \lambda E)X = 0$. При $\lambda_1 \approx -4{,}2841$ получим систему

$$\begin{aligned} 6{,}2841x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 8{,}2841x_2 + 5x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3{,}2841x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решив ее, получим $x^{(1)} = c\,(-0{,}597; -0{,}746; 1)^{\mathrm{T}}$.

Аналогично определяются два других собственных вектора.

При $\lambda_2 = 3{,}7621$ имеем

$$\begin{aligned} -1{,}7621x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 0{,}2379x_2 + 5x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4{,}7621x_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$x^{(2)} = c\,(1; -0{,}492; 0{,}423)^{\mathrm{T}}.$$

При λ_3= 5,5220 имеем

$$-3{,}522x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,$$
$$-2x_1 + 1{,}522\, x_2 + 5x_3 = 0,$$
$$3x_{\mathbf{1}} + 2x_2 - 6{,}522x_3 = 0.$$

$$x^{(3)} = c\,(-0{,}00858;\ 0{,}228;\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

5.2 Метод А. Н. Крылова

Пусть

$$D(\lambda) \equiv \det(\lambda\, E - A) = \lambda^n + p_1\,\lambda^{n-1} + p_2\,\lambda^{n-2} + \ldots, + \ p_n \ - \qquad (33)$$

характеристический полином (с точностью до знака) матрицы A. Согласно тождеству Гамильтона–Кэли, матрица A обращает в нуль свой характеристический полином; поэтому

$$A^n + p_1\,A^{n-1} + \ldots + p_n\,E = 0. \qquad (34)$$

Возьмем теперь произвольный ненулевой вектор $y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ \ldots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$.

Умножая обе части равенства (34) справа на $y^{(0)}$**,** получим:

$$A^n y^{(0)} + p_1 A^{n-1} y^{(0)} + \ldots + p_n y^{(0)} = 0. \qquad (35)$$

Положим:

$$A^k y^{(0)} = y^{(k)} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (36)$$

тогда равенство (35) приобретает вид

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y^{(0)} = 0. \qquad (37)$$

или

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} \ldots y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} \ldots y_2^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} \ldots y_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \ldots \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}, \qquad (37^*)$$

где

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \dots \\ y_n^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad (k = 1, 2, ..., n).$$

Следовательно, векторное равенство (37^*) эквивалентно системе уравнений

$$p_1 y_j^{(n-1)} + p_2 y_j^{(n-2)} + ..., + p_n y_j^{(0)} = -y_j^{(n)} \qquad (j = 1, 2, ..., n), \qquad (38)$$

из которой можно определить неизвестные коэффициенты $p_1, p_2, ..., p_n$.

Так как на основании формулы (36)

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad \text{где } (k = 1, 2, ..., n),$$

то координаты $y_1^{(k)}$, $y_2^{(k)}$, ..., $y_n^{(k)}$ вектора $y^{(k)}$ последовательно вычисляются по формулам:

$$y_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j^{(0)} \quad , \quad y_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j^{(1)} \ , \ldots, \ y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j^{(n-1)} . \qquad (39)$$

Таким образом, определение коэффициентов p_j характеристического полинома (33) методом А. Н. Крылова сводится к решению линейной системы уравнений (38), коэффициенты которой вычисляются по формулам (35), причем координаты начального вектора

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ \dots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

произвольны. Если система (38) имеет единственное решение, то ее корни $p_1, p_2, ..., p_n$ являются коэффициентами характеристического полинома (33). Это решение может быть найдено, например, методом Гаусса. Если система (38) не имеет единственного решения, то задача усложняется. В этом случае рекомендуется изменить начальный вектор.

Пример. Найти характеристический полином матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Выберем начальный вектор $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Пользуясь формулами (39), определим координаты векторов

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)}, \ k = 1, 2, 3, 4.$$

$$y^{(1)} = A y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$y^{(2)} = A y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix};$$

$$y^{(3)} = A y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{bmatrix};$$

$$y^{(4)} = A y^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{bmatrix}.$$

Составим систему (38): $\begin{bmatrix} y_1^{(3)} & y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(3)} & y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(3)} & y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ y_4^{(3)} & y_4^{(2)} & y_4^{(1)} & y_4^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ y_4^{(4)} \end{bmatrix}$,

которая в нашем случае будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 208 & 30 & 1 & 1 \\ 178 & 22 & 2 & 0 \\ 192 & 18 & 3 & 0 \\ 242 & 20 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2\,108 \\ 1\,704 \\ 1\,656 \\ 1\,992 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 208p_1 + 30p_2 + p_3 + p_4 &= -2\,108, \\ 178p_1 + 22p_2 + 2p_3 &= -1\,704, \\ 192p_1 + 18p_2 + 3p_3 &= -1\,656, \\ 242p_1 + 20p_2 + 4p_3 &= -1\,992. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим: $p_1 = -4$; $p_2 = -40$; $p_3 = -56$; $p_4 = -20$. Следовательно,

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20.$$

Определение собственных чисел матрицы состоит в решении полученного характеристического уравнения каким–либо из ранее рассмотренных методов. Этим самым поставленная задача решена.

Вопросы для самоконтроля

1 В чем суть собственного значения? Приведите примеры.

2 В чем сущность частичной проблемы собственных значений? Приведите примеры.

3 В чем отличия метода Крылова от прямого метода?

4 Как решать характеристическое уравнение проблемы собственных значений?

Литература

1 Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М. : Госиздат, 1962. – 639 с.

2 Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 428 с.

3 Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 531 с.

4 Крылов, В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М. : Наука, 1977. – 399 с.

5 Икрамов, Х. Д. Численные методы для симметричных линейных систем (прямые методы) / Х. Д. Икрамов. – М. : Наука, 1988. – 160 с.

6 Фаддеев, А. К. Вычислительные методы линейной алгебры / А. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – М. : Госиздат, 1960. – 656 с.

7 Вергасов, В. А. Вычислительная математика / В. А. Вергасов. – М. : Недра, 1976. – 230 с.

8 Воеводин, В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы / В. В. Воеводин. – М. : Наука, 1966.– 432 с.

9 Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1982. – 639 с.

Производственно-практическое издание

Можаровский Валентин Васильевич,
Дёмова Тамара Максимовна

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Практическое руководство

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 10.10.2017. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 749.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

В. В. МОЖАРОВСКИЙ, Т. М. ДЁМОВА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Гомель
2017