Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(51), ч. 2, 2008

УДК 512.542

О произведении классов конечных групп

В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Построенная Виландтом теория субнормальных подгрупп оказала огромное влияние на развитие всей теории конечных групп. В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости, введенное Кегелем в работе [1].

Напомним данное понятие.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Назовем подгруппу H $\mathfrak{F}$-достижимой в группе G, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустая нильпотентная формация, то множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в точности совпадает с множеством всех субнормальных подгрупп для произвольной группы G.

Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа субнормальна. Естественно возникает задача о нахождении классов конечных групп $\mathfrak{F}$, обладающих тем свойством, что группа G принажлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая её силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в G. Решению данной задачи посвящена настоящая работа.

Пусть $\mathfrak{G}$ – класс всех групп. В теории классов групп важную роль играет класс всех π-групп (π – некоторое множество простых чисел), который обозначается через $\mathfrak{G}_\pi$. Большинство важнейших классов групп можно построить из классов вида $\mathfrak{G}_\pi$ с помощью операций пересечения и произведения классов.

Напомним, что произведением классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, который состоит из всех групп G таких, что в G найдется нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа N с условием $G/N \in \mathfrak{H}$.

Пусть N – множество всех натуральных чисел, I – некоторое подмножество из $N \times N$. Пусть π_i, π_j – некоторые множества простых чисел. Мы исследуем формацию

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}.$$

Напомним, что группа G называется p-замкнутой (p-нильпотентной), если её силовская p-подгруппа (холлова p'-подгруппа) нормальна в G. Группа G называется p-разложимой, если она одновременно p-замкнута и p-нильпотентна.

Через π' мы обозначаем дополнение к π во множестве всех простых чисел; если $\pi = \{p\}$, то вместо π' будем просто писать p'. Тогда $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$ – класс всех p-нильпотентных групп, $\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}$ – класс всех p-замкнутых групп, $\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'} \bigcap \mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}$ – класс всех p-разложимых групп, $\mathfrak{N} = \bigcap \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$, где p пробегает все простые числа, – класс всех нильпотентных групп.

Группа G называется π-нильпотентной (π-разложимой), если она p-нильпотентна (p-разложима) для любого простого числа p из π. Классы всех π-нильпотентных (π-замкнутых) групп можно записать в виде

$$\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{p}\,,\ \bigcap_{p\in\pi}(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{p}\bigcap\mathfrak{G}_{p}\mathfrak{G}_{p'}).$$

Группа G называется π-замкнутой, если она имеет нормальную холлову π-подгруппу. Очевидно, $\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{G}_{\pi'}$ – класс всех π-замкнутых групп.

Из следующих лемм вытекает, что $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы обладают рядом свойств, аналогичных субнормальным подгруппам.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Пусть H и N – подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то HN – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, а HN/N – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N;

2) если $N\subseteq H$, то H является $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой в G тогда и только тогда, когда H/N – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, $H\le K\le G$. Если H $\mathfrak{F}$-достижима в K, а K $\mathfrak{F}$-достижима в G, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

Напомним, что $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей порядка группы G, а $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех различных простых делителей порядков групп из класса $\mathfrak{F}$. Все другие необходимые определения и обозначения можно найти в монографии [2].

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}=\bigcap_{(i,j)\in I}\mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, *где* I *– некоторое подмножество из* $N\times N$, *и пусть* G *– такая группа, что* $\pi(G)\subseteq\pi(\mathfrak{F})$. *Тогда и только тогда* G *принадлежит формации* $\mathfrak{F}$, *когда любая силовская подгруппа из* G $\mathfrak{F}$*-достижима в* G.

Из данной теоремы вытекает следующие результаты.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – множество всех π-нильпотентных групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – множество всех π-замкнутых групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G.

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – множество всех π-разложимых групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G.

Abstract. New characterizations of some classes of finite groups in the terms of generalized subnormal subgroups are obtained.

Литература

1. Kegel O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten // Arch. Math. – 1978. – V.30. – P.225 – 228.

2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука. – 1978. – 267 с.