Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(50), Ч2, 2008

УДК 512.542

Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами

Т. В. Тихоненко, В. Н. Тютянов

С использованием теоремы о классификации конечных простых неабелевых групп доказан следующий результат

Теорема. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, у которой всякая максимальная подгруппа является холловой. Тогда* $G \in \{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$.

Подгруппу L называют *дополняемой* в группе G, если в G существует подгруппа H такая, что $G = LH$ и $L \cap H = 1$. В работах [1], [2] было доказано, что если G — конечная простая неабелева группа, у которой каждая максимальная подгруппа дополняема, то $G \in \{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$.

Списки простых неабелевых групп в заключениях обоих результатов совпадают, что является несколько неожиданным. Поэтому кажется естественным предположить, что если G — конечная группа, у которой все максимальные подгруппы холловы, то все максимальные подгруппы группы G дополняемы в G.

Рассматриваемые группы конечны. Все используемые обозначения, в основном, стандартны. Их можно найти, например, в работах [3], [4], [5], [6]. Для удобства читателя приведем некоторые из них. Если a и b — натуральные числа, то (a, b) является их наибольшим общим делителем. Если n — натуральное число, то $\pi(n)$ — множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$, где $|G|$ — порядок группы G. Пусть G — конечная группа, π — некоторое множество простых делителей ее порядка. Будем говорить, что группа G обладает свойством E_π, если она содержит холлову π-подгруппу. Запись $A < \cdot G$ означает, что подгруппа A максимальна в группе G. Следующие ниже обозначения для групп лиевского типа можно найти в работе [5]. Обозначим через $\mathcal{L}$ простую алгебру Ли над некоторым полем F. Имеет место естественное разложение $\mathcal{L} = K \oplus \mathcal{L}_{r_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{r_k}$, где K — картанова подалгебра и $\mathcal{L}_{r_1}, \ldots, \mathcal{L}_{r_k}$ — корневые одномерные пространства. Через Φ будем обозначать систему корней, соответствующих данному разложению. $\Pi = \{p_1, \ldots, p_l\}$ — система простых корней. Число l называют *рангом* алгебры Ли $\mathcal{L}$. Через Φ^+ обозначают систему положительных корней для системы простых корней Π. *Группой Шевалле* типа $\mathcal{L}$ над полем F называют группу автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{L}$.

Пусть J — собственная подсистема системы простых корней Π. Подмножество простых корней $I \subseteq J$ называют связной компонентой, если часть диаграммы Дынкина, соответствующая корням из I, является связным графом и для любых двух корней $r \in I$ и $s \in J \backslash I$ выполняется равенство $(r, s) = 0$. Множество J можно единственным образом представить в виде объединения $J = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_t$ непересекающихся между собой связных компонент. Пусть $|I_m| = l_m$ и $|J| = \sum_{m=1}^{t} l_m = l_0$. Обозначим через $\mathcal{L}_m$ простую алгебру Ли над тем же полем F, которая имеет диаграмму Дынкина как у I_m, а через $d_{m,i}$ — инвариант d_i алгебры $\mathcal{L}_m$, который приведен в следующей таблице:

$\mathcal{L}$	$d_1, d_2, \cdots, d_l$
A_l	$2, 3, \cdots, l+1$
B_l	$2, 4, 6, \cdots 2l$
C_l	$2, 4, 6, \cdots 2l$

D_l	$2, 4, 6, \cdots 2l-2, l$
G_2	$2, 6$
F_4	$2, 6, 8, 12$
E_6	$2, 5, 6, 8, 9, 12$
E_7	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$
E_8	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$

Определение параболической подгруппы можно найти, например, в работах [5], [7].

Лемма 1 (Предложение 1 [5]). Если $J \subset \Pi$ представляется в виде объединения $J = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_t$ непересекающихся связных компонент, то порядок параболической подгруппы P_J группы $G = \mathcal{L}(G)$ равен

$$\frac{1}{d} q^N (q-1)^{l-l_0} \prod_{m=1}^{t} (q^{d_{m,1}} - 1)(q^{d_{m,2}} - 1) \ldots (q^{d_{m,l_m}} - 1),$$

где $d = |\overline{G}|/|G|$ и $\overline{G}$ — соответствующая универсальная группа Шевалле, $N = |\Phi^+|$, $l = |\Pi|$.

Следуя [8], будем говорить, что для упорядоченной пары (L, π) выполнено условие $(**)$, если L является группой Шевалле над полем $GF(q)$, характеристика p которого принадлежит π, и 2 принадлежит π.

Лемма 2 (Лемма 3.12 [8]). Пусть для пары (L, π) выполнено условие $(**)$, и пусть группа L обладает свойством E_π. Тогда если A — холлова π-подгруппа L, то верно одно из следующих утверждений.

(E1) $A = L$.

(E2) $p = 2$, $\pi \cap \pi(L) \subseteq \pi(q-1) \cup 2$, A содержится в некоторой подгруппе Бореля группы L.

(E3) $p = 2$, $L = D_l(q)$, диаграмма Дынкина системы простых корней для L представлена на рис. 1, число l является простым числом Ферма, $(l, q-1) = 1$, подгруппа A сопряжена с параболической подгруппой G_J, отвечающей множеству простых корней $J = \{r_2, r_3, \ldots, r_l\}$.

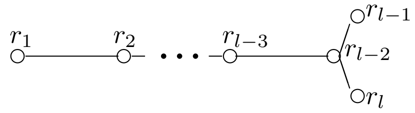


рис. 1

(E4) $p = 2$, $L = {}^2D_l(q)$, диаграмма Дынкина системы простых корней для L представлена на рис. 2, число $l-1$ является простым числом Мерсенна, $(l-1, q-1) = 1$, подгруппа A сопряжена с параболической подгруппой G_J, отвечающей множеству простых корней $J = \{r_2^1, r_3^1, \ldots, r_{l-1}^1\}$.

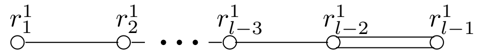


рис. 2

(E5) G изоморфна фактор-группе по некоторой центральной подгруппе группы $SL(V)$, где V — векторное пространство размерности n над полем $GF(q)$ характеристики p, A является образом в G относительно естественного гомоморфизма стабилизатора в $SL(V)$ ряда подпространств $0 = V_0 < V_1 < \cdots < V_s = V$ таких, что $dim V_i/V_{i-1} = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и выполнено одно из следующих условий:

(а) n — некоторое простое число, $(n, q-1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{1, n-1\}$;
(б) $n = 4$, $(2 \cdot 3, q-1) = 1$, $s = 2$, $n_1 = n_2 = 2$;
(в) $n = 5$, $(2 \cdot 5, q-1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{2, 3\}$;
(г) $n = 5$, $(2 \cdot 3 \cdot 5, q-1) = 1$, $s = 3$, $n_1, n_2, n_3 \in \{1, 2\}$;
(д) $n = 7$, $(5 \cdot 7, q-1) = 1$, $(3, q+1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{3, 4\}$;
(е) $n = 8$, $(2 \cdot 5 \cdot 7, q-1) = 1$, $(3, q+1) = 1$, $s = 2$, $n_1 = n_2 = 4$;
(ж) $n = 11$, $(2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11, q-1) = 1$, $(5, q+1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{5, 6\}$.

Доказательство теоремы.

Необходимо рассмотреть следующие случаи.
1. $G \cong A_l(q)$, $q = p^n$, $n \geqslant 1$, $l \geqslant 1$, p — простое число.
Матрица Картана алгебры A_l имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма Дынкина:

Если $n \geqslant 2$, то в A_l существует максимальная подгруппа $H = N_G(A_l(q_0)) \in C_5(G)$ [9], где $GF(q_0)$ — максимальное подполе в поле Галуа $GF(q)$. При этом $([A_l(q) : H], p) = (|H|, p) = p$, что невозможно. Поэтому всегда $q = p$.

Пусть сначала $l \geqslant 6$. По лемме 1 получаем следующие равенства:

$|P_1| = \frac{1}{d} q^{\frac{l(l+1)}{2}} (q-1) \prod_{i=1}^{l-1} (q^{i+1} - 1) = q^{\frac{l(l+1)}{2}} \frac{q-1}{d} \prod_{i=1}^{l-1} (q^{i+1} - 1)$,

$|P_2| = \frac{1}{d} q^{\frac{l(l+1)}{2}} (q-1)(q^2-1) \prod_{i=1}^{l-2} (q^{i+1} - 1) = q^{\frac{l(l+1)}{2}} \frac{q-1}{d} (q^2-1) \prod_{i=1}^{l-2} (q^{i+1} - 1)$, где $d = (l+1, q-1)$. Так как $|G| = \frac{1}{d} q^{\frac{l(l+1)}{2}} \prod_{i=1}^{l} (q^{i+1} - 1)$, то $[A_l(q) : P_2] = \frac{(q^{l+1}-1)(q^l-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ и $[A_l(q) : P_1] = \frac{(q^{l+1}-1)}{q-1}$.

По условию теоремы, $([G : P_1], |P_1|) = (\frac{(q^{l+1}-1)}{q-1}, q^{\frac{l(l+1)}{2}} \frac{q-1}{d} (q^2-1) \cdots (q^l-1)) = 1$.

Поэтому $(\frac{(q^{l+1}-1)}{q-1}, q^2-1) = 1$. Из равенства $\frac{(q^{l+1}-1)}{q-1} \cdot \frac{q^l-1}{q^2-1} = [A_l(q) : P_2]$ следует, что q^2-1 делит q^l-1. Легко показать, что это возможно только при $l = 2k$. Поэтому имеет место равенство: $\frac{q^l-1}{q^2-1} = \frac{(q^k-1)(q^k+1)}{q^2-1}$. Так как $l \geqslant 6$, то степень многочлена $f(q) = q^k - 1$ не меньше 3 и последняя дробь содержит отличные от единицы делители числа $q^k - 1$. Поскольку $q^k - 1 = q^{\frac{l}{2}}$ делит $|P_2|$, то получим, что $([A_l(q) : P_2], |P_2|) \neq 1$. Последнее невозможно. Таким образом, $l \leqslant 5$.

Если $l = 5$, то $[A_5(q) : P_2] = \frac{q^6-1}{q-1} \frac{q^5-1}{q^2-1}$ и q^2-1 делит q^5-1, что невозможно. При $l = 4$ получим $[A_4(q) : P_2] = \frac{q^5-1}{q-1} \frac{q^4-1}{q^2-1} = \frac{q^5-1}{q-1}(q^2+1)$. Если q — нечетное число, то $([A_4(q) : P_2], 2) = (|P_2|, 2) = 2$, что невозможно. Так как q — простое число, то $G = A_4(2)$. Из [10] следует, что в $A_4(2)$ все максимальны подгруппы холловы.

При $l = 3$ получим, что $[A_3(q) : P_2] = \frac{q^4-1}{q-1} \frac{q^3-1}{q^2-1}$ и q^2-1 делит q^3-1, что невозможно.

Пусть $l = 2$. Если $q = 2$, то $G \cong L_3(2) \cong L_2(7)$. Из [10] следует, что все максимальные подгруппы в G холловы. Пусть q — нечетное простое число. Из [11] следует, что группа $A_2(q)$ имеет максимальную подгруппу $PGL_2(q)$, которая не является холловой.

Рассмотрим случай $l = 1$. Если $q = 2$, то $G = L_2(2)$ — разрешимая группа, что невозможно. Следовательно, q — нечетное простое число. Группа $A_1(q)$ содержит максимальную подгруппу P порядка $\frac{1}{2}q(q-1)$ и индекса $q+1$. Так как $q+1$ четное число, то $|P|$ нечетен и $q + 1 = 4t$. Группа $A_1(q)$ содержит диэдральную подгруппу $D_{2(\frac{q-1}{2})}$ порядка $q - 1$. Если $q > 11$, то в диэдре есть элемент порядка больше чем 5 и по теореме Диксона $D_{2(\frac{q-1}{2})}$ максимальная в $A_1(q)$ индекса $\frac{1}{2}q(q+1)$. Так как $q-1$ — четное число, то $\frac{q+1}{2}$ — нечетное число и $q + 1 = 2r$, где r нечетно. Противоречие с тем, что $q + 1 = 4t$. Следовательно, $q \leq 11$. Из [10] следует, что только в группах $L_2(7)$ и $L_2(11)$ все максимальные подгруппы холловы.

2. $G = B_l(q) = P\Omega_{2l+1}(q)$, $q = p^n$, $n \geq 1$, $l \geq 2$.

Матрица Картана алгебры B_l имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & 0 & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма Дынкина:

$|G| = \frac{1}{d}q^{l^2}\prod_{i=1}^{l}(q^{2i}-1)$, где $d = (2, q-1)$. По лемме 1 $|P_1| = \frac{1}{d}q^{l^2}(q-1)\prod_{i=1}^{l-1}(q^{2i}-1) = \frac{q-1}{d}q^{l^2}\prod_{i=1}^{l-1}(q^{2i}-1)$. Следовательно, $[G : P_1] = \frac{q^{2l}-1}{q-1} = \frac{(q^2-1)(q^{2l-2}+q^{2l-4}+\cdots+q^2+1)}{q-1} = (q+1)(q^{2l-2} + q^{2l-4} + \cdots + q^2 + 1)$.

Поэтому $q + 1$ делит $|P_1|$ и $[G : P_1]$, что невозможно.

3. $G = C_l(q) = PSp_{2l}(q)$, $q = p^n$, $n \geq 1$, $l \geq 3$.

Дословное повторение предыдущего пункта.

Матрица Картана алгебры $_l$ имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & 0 & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

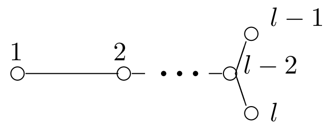
Диаграмма Дынкина:

4. $G = D_l(q) = P\Omega^+_{2l}(q)$, $q = p^n$, $n \geq 1$, $l \geq 4$.

Матрица Картана алгебры D_l имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & 0 & & -1 & 2 & 0 & \\ & & & & & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма Дынкина:



$|G| = \frac{1}{d}q^{l(l-1)}(q^l-1)\prod_{i=1}^{l-1}(q^{2i}-1)$, где $d = (4, q^n-1)$. Согласно лемме 1, $|P_{l-1}| = \frac{1}{d}q^{l(l-1)}(q-1)\prod_{i=1}^{l-1}(q^{i+1}-1)$. Отсюда следует, что $[G : P_{l-1}] = \frac{(q^{l-1}-1)(q^{l-1}+1)(q^{l-2}-1)(q^{l-2}+1)\cdots(q^2-1)(q^2+1)(q-1)(q+1)(q^l-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{l-1}-1)(q^l-1)} = (q^{l-1}+1)(q^{l-2}+1)\cdots(q^2+1)(q+1)$.

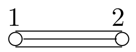
Если q — четное число, то $d = 1$ и $q+1$ делит $|P_{l-1}|$ и $[G : P_{l-1}]$, что невозможно. Если q — нечетное число, то $[G : P_{l-1}]$ — четное число. Так как $l \geq 4$, то очевидно, что $|P_{l-1}|$ — четное число. Следовательно, $(|P_{l-1}|, 2) = ([G : P_{l-1}], 2) = 2$, что невозможно.

5. $G \cong G_2(q)$.

Матрица Картана алгебры G_2 имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма Дынкина:



Имеет место равенство: $|G| = q^6(q^6-1)(q^2-1)$. Согласно лемме 1, $|P_1| = |P_2| = q^6(q^2-1)(q-1)$. Отсюда следует, что $[G : P_1] = [G : P_2] = \frac{q^6-1}{q-1} = \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q-1} = (q^2+q+1)(q+1)(q^2-q+1)$. Поэтому $(|P_1|, [G : P_1]) = (q^6(q^2-1)(q-1), (q^2+q+1)(q+1)(q^2-q+1)) = (q+1)((q-1)^2, (q^2+q+1)(q^2-q+1)) \neq 1$. Следовательно, параболические подгруппы P_1 и P_2 не холловы в группе G.

6. $G \cong F_4(q)$.

Матрица Картана алгебры F_4 имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма Дынкина:

Имеет место равенство: $|G| = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$. Согласно лемме 1, $|P_1| = q^{24}(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1) = q^{24}(q^3-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1)$. Поэтому $[G:P_1] = \frac{(q^{12}-1)(q^4-1)}{q-1} = \frac{(q^6-1)(q^6+1)(q^4+1)}{q-1} = \frac{(q-1)(q^2+q+1)(q^3+1)(q^6+1)(q^4+1)}{q-1} = (q^3+1)(q^2+q+1)(q^6+1)(q^4+1)$.

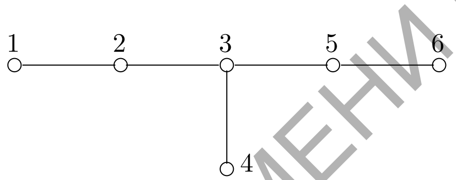
Значит, $(|P_1|, [G:P_1]) = (q^{24}(q^3-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1), (q^3+1)(q^2+q+1)(q^6+1)(q^4+1)) = (q^3+1)((q^3-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1), (q^2+q+1)(q^6+1)(q^4+1)) \neq 1$. Следовательно, параболическая подгруппа P_1 не является холловой в группе G.

7. $G \cong E_6(q)$.

Матрица Картана алгебры E_6 имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма Дынкина:



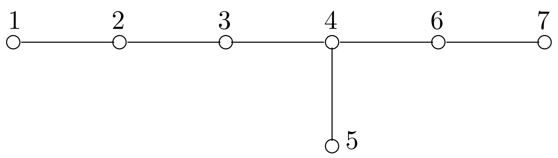
Имеет место равенство: $|G| = \frac{1}{d}q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$, где $d = (3, q-1)$. Согласно лемме 1, $|P_1| = \frac{1}{d}q^{36}(q-1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^5-1) = q^{36}\frac{q-1}{d}(q^2-1)(q^4-1)(q-1)(q^2+q+1)(q^3+1)(q^8-1)(q^5-1)$. Отсюда следует, что $[G:P_1] = \frac{(q^{12}-1)(q^9-1)}{(q-1)(q^4-1)} = \frac{(q^4-1)(q^8+q^4+1)(q-1)(q^2+q+1)(q^6+q^3+1)}{(q-1)(q^4-1)} = (q^8+q^4+1)(q^2+q+1)(q^6+q^3+1)$. Следовательно, $(|P_1|, [G:P_1]) = (q^{36}\frac{q-1}{d}(q^2-1)(q^4-1)(q-1)(q^2+q+1)(q^3+1)(q^8-1)(q^5-1), (q^8+q^4+1)(q^2+q+1)(q^6+q^3+1)) = (q^2+q+1)(\frac{q-1}{d}(q^2-1)(q^4-1)(q-1)(q^3+1)(q^8-1)(q^5-1), (q^8+q^4+1)(q^6+q^3+1)) \neq 1$. Поэтому параболическая подгруппа P_1 не является холловой в групе G.

8. $G \cong E_7(q)$.

Матрица алгебры E_7 имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма Дынкина:



Имеет место равенство: $|G| = \frac{1}{d}q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$, где $d = (2, q-1)$. Согласно лемме 1, $|P_1| = \frac{1}{d}q^{63}(q-1)(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-$

$1)(q^5-1)(q^2-1)=\frac{q-1}{d}q^{63}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^3-1)(q^3+1)(q^5-1)(q^2-1)$. Поэтому $[G:P_1]=\frac{(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{10}-1)}{(q-1)(q^9-1)(q^5-1)}=(q^9+1)(q^5+1)\frac{q^{14}-1}{q-1}=(q^3+1)(q^6-q^3+1)(q^5+1)\frac{q^{14}-1}{q-1}$.

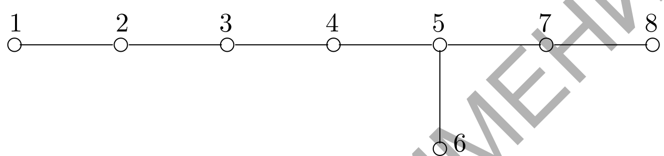
Следовательно, $(|P_1|,[G:P_1])=(q^3+1)(\frac{q-1}{d}q^{63}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^3-1)(q^5-1)(q^2-1),(q^6-q^3+1)(q^5+1)\frac{q^{14}-1}{q-1})\neq 1$. Таким образом, параболическая подгруппа P_1 не является холловой подгруппой в группе G.

9. $G\cong E_8(q)$.

Матрица Картана алгебры E_8 имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма Дынкина:



Имеет место равенство: $|G|=q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)$. Согласно лемме 1, $|P_1|=q^{120}(q-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)=q^{120}(q-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^6-1)(q^6+1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$.

Следовательно, $[G:P_1]=\frac{(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)}{(q-1)(q^{10}-1)(q^6-1)}=\frac{q^{30}-1}{q-1}(q^{10}+1)\frac{(q^6-1)(q^6+1)(q^{12}+1)}{q^6-1}=\frac{q^{30}-1}{q-1}(q^{10}+1)(q^{12}+1)(q^6+1)$.

Поэтому $(|P_1|,[G:P_1])=(q^6+1)((q-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^6-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1),\frac{q^{30}-1}{q-1}(q^{10}+1)(q^{12}+1))\neq 1$. Следовательно, параболическая подгруппа P_1 не является холловой в группе G.

Большую часть обозначений для исключительных групп лиевского типа мы будем брать из работы [12].

10. $G={}^2A_{l-1}(q)=PSU_l(q)$, $q=p^n$, $n\geq 1$, $l\geq 3$.

$|G|=\frac{1}{d}q^{\frac{l(l-1)}{2}}\prod_{i=1}^{l-1}(q^{i+1}-(-1)^{i+1})$, где $d=(l,q+1)$.

Пусть $l=3$. Из [11] следует, что группа G имеет максимальную подгруппу H, для которой $|H|=\frac{q+1}{(3,q+1)}q^3(q-1)$ и $[G:H]=(q+1)(q^2-q+1)$. Если $q+1\neq 3$, то $(|H|,[G:H])\neq 1$, что невозможно. Следовательно, $q+1=3$ и $q=2$. Данный случай невозможен, поскольку группа $PSU_3(2)$ разрешима. Пусть $l\geq 4$. Из [11] следует, что группа G имеет максимальную подгруппу H для которой $|H|=\frac{q+1}{d}q^{\frac{l(l-1)}{2}}(q-1)(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{l-1}-(-1)^{l-1})$ и $[G:H]=(q^l-(-1)^l)(q^{l-1}-(-1)^{l-1})$. Поэтому $(q^{l-1}-(-1)^{l-1})$ делит H и $[G:H]$, что невозможно.

11. $G={}^2B_2(q)$, $q=2^{2m+1}$, $m\geqslant 1$.

$|G|=q^2(q^2+1)(q-1)$. Из [13] следует, что группа ${}^2B_2(q)$ имеет максимальную подгруппу H порядка $4(q\pm r+1)$, где $r^2=2q$. Очевидно $(|H|,2)=([G:H],2)=2$, что невозможно.

12. $G={}^2G_2(q)$, $q=3^{2m+1}$, $m\geqslant 1$.

$|G| = q^3(q^3+1)(q-1)$. Из [14] следует, что группа ${}^2G_2(q)$ содержит максимальную подгруппу H, изоморфную $2 \times L_2(q)$. Тогда $(|H|, q) = ([G : H], q) = q$, что невозможно.

13. $G = {}^3D_4(q)$.

$|{}^3D_4(q)| = q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$. Из работы [5] следует, что группа ${}^3D_4(q)$ содержит максимальную параболическую подгруппу P_2^1, для которой $|P_2^1| = q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^3-1)$ и $[{}^3D_4(q) : P_2^1] = (q^8+q^4+1)(q+1)$. Следовательно, порядок и индекс параболической подгруппы не взаимно просты, что невозможно.

14. $G = {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2m+1}$.

$|{}^2F_4(q)| = q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)$. Из работы [5] следует, что группа ${}^2F_4(q)$ имеет параболическую подгруппу P^1, для которой $|P^1| = (q-1)^2(q^2+1)$ и индекс $[{}^2F_4(q) : P^1] = (q^6+1)(q^3+1)(q+1)$. Поскольку $q^6+1 = (q^2+1)(q^4-q^2+1)$, то порядок и индекс параболической подгруппы не взаимно просты, что невозможно.

Для группы Титса ${}^2F_4(q)'$ наличие максимальной не холловой подгруппы следует из [10].

15. $G = {}^2E_6(q)$.

$|{}^2E_6(q)| = \frac{1}{(3,q+1)}q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)$. Из работы [5] следует, что группа ${}^2E_6(q)$ имеет максимальную параболическую подгруппу P^1, для которой $|P^1| = \frac{1}{(3,q+1)}q^{36}(q+1)(q^4-1)(q^5+1)(q^6+1)(q^3+1)$ и индекс $[{}^2E_6(q) : P^1] = (q^{12}-1)(q^6-q^3+1)(q^4+1)(q-1)$. Следовательно, $(|P^1|, [{}^2E_6(q) : P^1]) \neq 1$, что невозможно.

16. $G = {}^2D_l(q)$, где $l > 3$.

Рассмотрим в группе G множество максимальных подгрупп четного порядка. Согласно пункту (E4) леммы 2 в группе ${}^2D_l(q)$ имеется только один класс сопряженных холловых подгрупп четного порядка. Подгруппы данного класса сопряжены с максимальной параболической подгруппой, отвечающей множеству простых корней $\{r_2^1, r_3^1, \ldots, r_{l-1}^1\}$. При этом q — степень числа 2. Для завершения доказательства пункта 16 достаточно рассмотреть любую максимальную параболическую подгруппу (ее порядок — четное число) группы ${}^2D_l(q)$, которая не соответствует системе корней $\{r_2^1, r_3^1, \ldots, r_{l-1}^1\}$.

17. $G = A_n$, $n \geq 5$.

Одноточечный стабилизатор $A_{n-1} < \cdot A_n$ и $[A_n : A_{n-1}] = n$. Так как $(|A_{n-1}|, [A_n : A_{n-1}]) = (\frac{(n-1)!}{2}, n) = 1$, то $n = p$ — простое число. Двухточечный стабилизатор $M = A_p \cap (S_2 \times S_{p-2}) < \cdot A_p$. Очевидно, что $|M| = 2|A_{p-2}|$. Поэтому $[A_p : M] = \frac{p(p-1)}{2}$. Так как $(|M|, [G : M]) = 1$, то $((p-2)!, \frac{p(p-1)}{2}) = 1$. Поскольку p — простое число, то $((p-2)!, \frac{(p-1)}{2}) = 1$. Если $\frac{p-1}{2} \leq p-2$, то $\frac{p-1}{2}$ делит $(p-2)!$. Это возможно только при $p = 3$. Так как $p \geq 5$, то выполняется неравенство $\frac{p-1}{2} > p-2$ или $p < 3$, что невозможно. Поэтому M не является холловой подгруппой в G.

18. G — спорадическая группа.

Из [10] следует, что во всякой спорадической группе существует максимальная не холлова подгруппа.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору А.В. Васильеву за предоставленную им информацию.

Abstract. Abstract. Finite groups with maximal Hall subgroups are considered in the paper.

Литература

1. Левчук, В.М. Конечные простые группы с дополняемыми максимальными

подгруппами / В.М. Левчук, А.Г. Лихарев // Сибирский мат. журн., 2006. — Т. 47, № 4. — С. 798-810.

2. Тютянов, В.Н. Конечные группы с дополняемыми подгруппами / В.Н. Тютянов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, 2006. — №3(36). — С. 178-183.

3. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein // New-York.: Harper and Row, 1968.

4. Carter, R. W. Simple groups of Lie type / R.W. Carter // London.: John Wiley and Sons, 1972.

5. Васильев, А.В. Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 / А.В. васильев // Алгебра и логика, 1996. — Т. 35, № 6. — С. 663-684.

6. Васильев, А.В. Минимальные подстановочные представления конечных простых ортогональных групп / А.В. Васильев, В.Д. Мазуров // Алгебра и логика, 1994. — Т. 33, № 6. — С. 603-627.

7. Кондратьев, А.С. Подгруппы конечных групп Шевалле / А.С. Кондратьев // Успехи математических наук, 1986. — Т. 41, вып. 1(247). — С. 57-96.

8. Ревин, Д.О. Две D_π-теоремы для одного класса конечных групп. / О.Д. Ревин // Препринт № 40, Новосибирск, 1999. — С. 42

9. Kleidman, P. The subgroups structure of the finite classical groups / P. Kleidman, M. Liebeck // Cambridge University Press, 1990.

10. Conway, J.H. Atlas of Finite Groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson // Oxford, 1985.

11. Mitchel, H.H. Determination of the ordinary and modular ternary liner groups / H.H. Mitchel // Trans. Amer. Math. Soc., 1911. — V. 12. — P. 207-242.

12. Васильев, А.В. Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа / А.В. Васильев // Алгебра и логика, 1998. — Т. 37, № 1. — С. 17-35.

13. Suzuki, M. On a class of doubly transitive groups. I, II / M. Suzuki // Ann. Math., 1962. — Vol. 75, № 1. — P. 105-145; 1964. — Vol. 79, № 3. — P. 514-589.

14. Kleidman, P. The maximal subgroups of the Chevalle groups $G_2(q)$ with q odd, Ree groups ${}^2G_2(q)$ and thei automorphism groups / P. Kleidman // J. Algebra, 1988. — Vol. 117. — P. 30-71.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 10.05.08