Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

О классах несубнормальных подгрупп конечной группы

Т. В. Бородич

Будем рассматривать только конечные группы. Используемые обозначения и термины соответствуют [1].

В работе [2] П. И. Трофимов исследовал свойства конечной группы в зависимости от порядков всех классов сопряженных подгрупп (т. е. в зависимости от индексов нормализаторов подгрупп конечной группы). В этой работе показано, что если порядки всех классов сопряженных подгрупп являются степенями простых чисел, то группа разрешима.

В работах П. И. Трофимова и К. Геринга [3–5] исследовались свойства конечной группы в зависимости от наибольшего общего делителя $d(G)$ порядков всех классов ненормальных сопряженных подгрупп (т. е. в зависимости от наибольшего общего делителя индексов нормализаторов ненормальных подгрупп конечной группы). В [4] показано, что если $d(G) > 1$, то $d(G)$ — простое число и группа G сверхразрешима. К. Геринг [5] доказал, что $d(G) = p$ — простое число тогда и только тогда, когда справедливы следующие утверждения: *a) существует нормальная подгруппа N такая, что G/N циклическая, $|G/N|$ делит $p-1$ и $N = P \times D$, где P — силовская p-подгруппа в группе G и D — дедекиндова подгруппа; b) каждая нормальная подгруппа из P нормальна в группе G; c) G/P — дедекиндова группа; d) G/D — не дедекиндова группа.*

В данной работе исследуются свойства группы G в зависимости от наибольшего общего делителя $d^*(G)$ порядков всех классов несубнормальных сопряженных подгрупп группы G. При этом получено развитие результатов П. И. Трофимова и К. Геринга.

Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Если $d^*(G) \neq 1$, то группа G — метанильпотентна.*

Напомним, что метанильпотентной называют группу, содержащую нильпотентную нормальную подгруппу, факторгруппа по которой нильпотентна. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B; $H \lhd G$ — H нормальная подгруппа группы G; $H \lhd \lhd G$ — H субнормальная подгруппа группы G; $H char\ G$ — H характеристическая подгруппа группы G; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной формацией, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую подгруппу группы G, у которой $G/N \in \mathfrak{F}$ для $N \leq \Phi(G)$.

Класс всех ненормальных подгрупп группы G обозначим через:

$$\mathfrak{X}(G) = \{H \mid H \leq G,\ H \text{ ненормальна в } G\}.$$

Класс всех несубнормальных подгрупп группы G обозначим через:

$$\mathfrak{X}^*(G) = \{M \mid M \leq G,\ M \text{ несубнормальна в } G\}.$$

Наибольший общий делитель $d(G)$ порядков всех классов ненормальных сопряженных подгрупп группы G обозначим через:

$$d(G) = \text{НОД}\{|G : N_G(H)| \mid H \in \mathfrak{X}(G)\}.$$

Наибольший общий делитель $d^*(G)$ порядков всех классов несубнормальных сопряженных подгрупп ненильпотентной группы G обозначим через:

$$d^*(G) = \text{НОД}\{|G : N_G(M)| \mid M \in \mathfrak{X}^*(G)\}.$$

Если G — нильпотентная группа, то $\mathfrak{X}^*(G) = \varnothing$ и $d^*(G)$ считаем, равным нулю ($d^*(G) = 0$).

Пример 1. В симметрической группе $S_3 = [Z_3]Z_2$ существует единственная нормальная подгруппа Z_3. В группе S_3 все подгруппы порядка 2 несубнормальны. Поэтому $d^*(S_3) = d(S_3) = 3$.

Пример 2. В группе $S_4 = [E_4]S_3$ существуют две самонормализуемые подгруппы D_8 и S_3. Они обе максимальные в группе S_4. Поэтому $d^*(S_4)$ делит НОД$(|S_4 : S_3| = 4, |S_4 : D_8| = 3) = 1$, т. е. $d^*(S_4) = d(S_4) = 1$.

Пример 3. В группе $A_4 = [E_4]Z_3$ множество всех подгрупп исчерпывается следующими подгруппами:

$$1,\ Z_2^1,\ Z_2^2,\ Z_2^3,\ E_4,\ Z_3^1,\ Z_3^2,\ Z_3^3,\ Z_3^4,\ A_4.$$

Поэтому $\mathfrak{X}^*(A_4) = \{Z_3^1,\ Z_3^2,\ Z_3^3,\ Z_3^4,\}$. Отсюда получаем, что

$$d^*(A_4) = \text{НОД}\{|A_4 : Z_3^i| = 4 \mid i = \overline{1,4}\} = 4 = 2^2.$$

Так как $\mathfrak{X}(A_4) = \{Z_2^1,\ Z_2^2,\ Z_2^3,\ Z_3^1,\ Z_3^2,\ Z_3^3,\ Z_3^4\}$, то $d(A_4) = 2$.

Таким образом, $d^*(A_4) = 2^2 \neq d(A_4) = 2$.

Пример 4. Группа $G = A_4 \times S_3$ метанильпотентна, но $d^*(G) = 1$.

Действительно, так как $A_4 = [E_4]Z_3^{(1)}$, $S_3 = [Z_3^{(2)}]Z_2$, то подгруппа Фиттинга $F(G) = E_4 \times Z_3^{(2)}$, а фактор-группа по ней изоморфна группе $Z_3^{(1)} \times Z_2$. Следовательно группа G метанильпотентна. Несубнормальными в G подгруппами будут, в частности, подгруппы $Z_3^{(1)}$ и Z_2. Их нормализаторы $N_G(Z_3^{(1)}) = Z_3^{(1)} \times S_3$ и $N_G(Z_2) = A_4 \times Z_2$ имеют индексы $|G : N_G(Z_3^{(1)})| = 4$ и $|G : N_G(Z_2)| = 3$. Поэтому $d^*(G) = d(G) = 1$.

Лемма 1. *Для любой группы G выполняется условие $\mathfrak{X}^*(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$.*

Доказательство. Пусть $S(G)$ — множество всех подгрупп. Тогда $S(G)\backslash\mathfrak{X}(G)$ — множество нормальных подгрупп, а $S(G)\backslash\mathfrak{X}^*(G)$ — множество субнормальных подгрупп. Так как нормальная подгруппа всегда является субнормальной, то $S(G)\backslash\mathfrak{X}(G) \subseteq S(G)\backslash\mathfrak{X}^*(G)$. Следовательно $\mathfrak{X}^*(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$.

Лемма 2. *Для любой группы G выполняется условие $d(G)$ делит $d^*(G)$.*

Доказательство. По лемме 1 $\mathfrak{X}^*(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$. Из определения числа $d^*(G)$ получаем, что $d(G)$ делит $d^*(G)$.

Лемма 3. *Для любой группы G выполняется условие*

$$\text{НОД}\{|G : N_G(G_p)| \mid p \in \pi(G)\} = 1.$$

Доказательство. Для любого $p \in \pi(G)$ справедливо утверждение, что p не делит $|G : N_G(G_p)|$. Тогда получаем, что p не делит НОД$\{|G : N_G(G_p)| \mid p \in \pi(G)\}$. Следовательно условие леммы выполняются.

Лемма 4. *Если силовская p-подгруппа G_p субнормальна в группе G, то она будет нормальна в данной группе G.*

Доказательство. Так как $G_p \lhd\lhd G$, то $G_p \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \ldots \lhd H_n = G$. По лемме 2.12 [1] так как $G_p \lhd H_1$, то она характеристическая подгруппа в H_1. Следовательно $G_p \lhd H_2$. Опять применяя лемму 2.12 [1] G_p *char* H_2 и так далее. Получим, что G_p *char* H_n и $G_p \lhd G$.

Лемма 5. *Если $\pi = \pi(d^*(G)) \neq \varnothing$, то существует π-холлова нормальная нильпотентная подгруппа в группе G.*

Доказательство. Пусть $\pi(d^*(G)) \neq \varnothing$ и $p \in \pi(d^*(G))$. Если G_p несубнормальна в группе G, то $G_p \in \mathfrak{X}^*(G)$ и p не делит $|G : N_G(G_p)|$. Поэтому p не делит $d^*(G)$, противоречие. Следовательно $G_p \lhd \lhd G$, по лемме 4 $G_p \lhd G$. Беря произведение нормальных силовских p-подгрупп для всех $p \in \pi(d^*(G))$, получаем, что $G_\pi \in \mathfrak{N}$ и $G_\pi \lhd G$.

Лемма 6. Тогда и только тогда $p \in \pi(d^*(G))$, *когда из условия* $G_p \leq U \leq G$ *следует, что* $U \lhd \lhd G$.

Доказательство. Пусть $p \in \pi(d^*(G))$ и $G_p \leq U \leq G$. Тогда $G_p \leq U \leq N_G(U) \leq G$ и p не делит $|G : N_G(U)|$. Допустим, что $N_G(U)$ несубнормальна в группе G. Тогда $d^*(G)$ делит $|G : N_G(U)|$, поэтому p делит $|G : N_G(U)|$, противоречие. Значит, $N_G(U) \lhd \lhd G$ и $U \lhd \lhd G$.

Обратно, пусть из условия $G_p \leq U \leq G$ следует, что $U \lhd \lhd G$. Покажем, что $p \in \pi(d^*(G))$. Допустим противное $p \notin \pi(d^*(G))$. Это означает, что существует несубнормальная подгруппа V в группе G такая, что p не делит $|G : N_G(V)|$. Отсюда следует, что некоторая силовская p-подгруппа G_p содержится в $N_G(V)$. Но в этом случае по нашему условию подгруппа $N_G(V)$ субнормальна в G. Так как $V \lhd N_G(V) \lhd \lhd G$, то $V \lhd \lhd G$, противоречие. Поэтому допущение $p \notin \pi(d^*(G))$ неверно и $p \in \pi(d^*(G))$.

Лемма 7. *Пусть группа G ненильпотентна и $N \lhd G$. Тогда $d^*(G)$ делит $d^*(G/N)$.*

Доказательство. Если G/N нильпотентна, то $d^*(G)$ делит $d^*(G/N) = 0$. Пусть G/N ненильпотентна. Если $M/N \in \mathfrak{X}^*(G/N)$, то есть подгруппа M/N несубнормальна в группе G/N, то подгруппа M несубнормальна в группе G и $M \in \mathfrak{X}^*(G)$.

Если $N \leq M$ $N \lhd G$, то справедливо утверждение $N_G(M)/N \leq N_{G/N}(M/N)$. Докажем его. Если $x \in N_G(M)$, то $M^x = M$. Поэтому $(M/N)^{x/N} = x^{-1}N(M/N)xN = Nx^{-1}MxN/N = NM^x/N = M^x/N = M/N$, то есть $x/N \in N_{G/N}(M/N)$ и $N_G(M)/N \leq N_{G/N}(M/N)$.

Теперь пусть $N_{G/N}(M/N) = X/N$. Тогда $M/N \lhd X/N$, $M \lhd X$ и $X \leq N_G(M)$. Поэтому $N_{G/N}(M/N) \leq N_G(M)/N$.

Имеем $N_{G/N}(M/N) = N_G(M)/N$.

Теперь получаем, что $d^*(G)$ делит

$$|G : N_G(M)| = \frac{|G|}{|N_G(M)|} = \frac{|G|}{|N_G(M)|}\frac{|N|}{|N|} = \frac{|G/N|}{|N_G(M)/N|} =$$

$$= |G/N : N_G(M)/N| = |G/N : N_{G/N}(M/N)|.$$

Следовательно $d^*(G)$ делит $d^*(G/N)$.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Предположим, что $G \in \mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой $N \lhd G$ и $N \neq E$, тогда G — примитивная группа.*

Доказательство. Допустим, что в группе существует единственная минимальная нормальная подгруппа N. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая N. Положим, что ядро $M_G \neq 1$. Так как N — минимальная нормальная подгруппа и $N \nleq M$, то $N \cap M_G \neq 1$. Но теперь в группе две минимальные нормальные подгруппы, противоречие. Поэтому $M_G = 1$, значит группа G примитивна с примитиватором M.

Лемма 9. *В группе G, $d^*(G)$ есть либо 0, либо 1, либо степень некоторого простого числа r.*

Доказательство. Если группа G — нильпотентна, то $\mathfrak{X}^*(G) = \varnothing$ и $d^*(G) = 0$.

Если группа G — ненильпотентна, то она содержит, по крайней мере, одну ненормальную максимальную подгруппу. Допустим, что H — ненормальная максимальная подгруппа в группе G. Следовательно, H — несубнормальная подгруппа в группе G.

Предположим, что $d^*(G) = r^l s$, где r — простое число, $s > 1$, $(r, s) = 1$, $l > 0$. Тогда силовская r-подгруппа R субнормальна в G. По лемме 4 подгруппа $R \lhd G$. Следовательно, RH — собственная подгруппа в группе G, так как $|G : RH| = s$. Получаем цепь строгих включений $H < RH < G$. Имеем противоречие с тем, что H максимальна в G. Поэтому $s = 1$ и $d^*(G) = r^l$.

Пример 3 показывает, что $d^*(G)$ может быть степенью некоторого простого числа p. Следовательно, в лемме 9 нельзя получить, что $d^*(G)$ есть простого числа p.

Доказательство теоремы. Пусть $\pi = \pi(d^*(G)) \neq \varnothing$. По лемме 5 существует π-холлова подгруппа G_π и $G_\pi \lhd G$, $G_\pi \in \mathfrak{N}$, $G_\pi \neq 1$.

Пусть $N = G_\pi$. По лемме 7 либо G/N нильпотентна, либо $\pi(d^*(G)) \subseteq \pi(d^*(G/N))$. Во втором случае по индукции G/N принадлежат $\mathfrak{N}^2$. Поэтому группа G/N разрешима в каждом случае. Из этих условий следует, что группа G разрешима.

Так как $\mathfrak{N}^2$ — насыщенная формация, то группа G примитивна по лемме 8 и $G = [F(G)]M$, где $F(G) = E_{p^n} \cdot \lhd G$. Для любой подгруппы $M_1 \subseteq M$ по лемме 6 выполняется условие $F(G)M_1 \lhd \lhd G$, следовательно $M \cap F(G)M_1 = M_1(F(G) \cap M) = M_1$ и получаем, что $M_1 \lhd \lhd M$. Тем самым показано, что $M \in \mathfrak{N}$, следовательно $G \in \mathfrak{N}^2$. Таким образом группа G — метанильпотентна. Теорема доказана.

Abstract. The paper considers the construction of finite groups according to the greatest common measure of orders of all classes of non-subnormal conjugate subgroups.

Литература

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов // – Минск: Выш. школа – 2006. – 320 С.

2. Трофимов, П. И. О признаках непростоты и разрешимости конечныхгрупп / П. И. Трофимов // Сибирский математический журнал. – 1962. — Т.3, №6 – С.876-881

3. Трофимов, П. И. Исследование влияния на свойства конечной группы общего наибольшего делителя порядков всех ее классов неинвариантныхсопряженных силовских подгрупп / П. И. Трофимов // Сибирский математический журнал. – 1963. — Т.4, №1 — С.236-239

4. Трофимов, П. И. Заметка о признаках сверхразрешимости и разрешимостиконечных групп / П. И. Трофимов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1965. — Т.49, №6 – С.144-146

5. Hering, Ch. Gruppen mit nichttrivialer Trofimovzahl / Ch. Hering // Arch. Math. – 1964. — V.15, №6 – С.404-407

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 22.12.07