Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

О свойствах ненильпотентной однопорожденной $\mathfrak{L}$-композиционной формации

П. А. Жизневский

1. Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Мы используем терминологию принятую в работах [1, 2, 4]. При исследовании внутреннего строения различных типов формаций и их классификации важную роль играют так называемые однопорожденные формации, т.е. такие формации, которые порождены одной группой. Разработанные в этом направлении методы и конструкции теории насыщенных формаций [1, 2], после их адаптации [3, 4], стали с успехом использоваться различными авторами при исследовании частично насыщенных [5–10] и частично композиционных [11–14] формаций. Развивая наблюдения работ [2, 7], в настоящей заметке изучаются свойства ненильпотентных однопорожденных $\mathfrak{L}$-композиционных формаций.

Основными результатами работы являются

Теорема 1. В каждой ненильпотентной однопорожденной $\mathfrak{L}$-композиционной формации содержится лишь конечное множество $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций с нильпотентным дефектом 1.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — ненильпотентная однопорожденная $\mathfrak{L}$-композиционная формация и $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ — решетка с дополнениями. Тогда каждый элемент $\mathfrak{M}$ решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ представим в виде $\mathfrak{M} = \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N})\vee^{\mathfrak{L}}\mathfrak{H}_i \mid i\in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$.

2. Определения и обозначения

Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольный непустой класс простых групп. Тогда любую функцию вида $f : \mathfrak{L}\cup\{\mathfrak{L}'\} \to \{$формации групп$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах называют $\mathfrak{L}$-композиционным спутником. Для произвольного класса простых групп $\mathfrak{T}$ символ $E\mathfrak{T}$ обозначает класс всех таких групп, у которых все композиционные факторы принадлежат $\mathfrak{T}$. Символом $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ обозначают совокупность всех таких простых групп A, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$. Символом $C^A(G)$ обозначается пересечение всех централизаторов таких главных факторов H/K группы G, что $A \in \mathcal{K}(H/K)$ ($C^A(G) = G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Символом $G_{E\mathfrak{L}}$ обозначают произведение всех нормальных $E\mathfrak{L}$-подгрупп группы G, т.е. всех нормальных подгрупп, у которых композиционные факторы из $\mathfrak{L}$. Через $\mathrm{H}\mathfrak{X}$ обозначают класс всех гомоморфных образов групп из $\mathfrak{X}$.

Для произвольного $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f полагают

$$CF_{\mathfrak{L}}(f) = \{G \mid G/G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}') \text{ и } G/C^A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{K}(G)\cap\mathfrak{L}\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ для некоторого $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f, то говорят, что она $\mathfrak{L}$-композиционна, а f — $\mathfrak{L}$-композиционный спутник этой формации.

Символом $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, которые содержат класс групп $\mathfrak{X}$. Пересечение всех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, содержащих данную группу G, снова является $\mathfrak{L}$-композиционной формацией. Такую формацию называют однопорожденной $\mathfrak{L}$-композиционной формацией и обозначают $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, G$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ набор всех $\mathfrak{L}$-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда спутник $\bigcap_{i\in I} f_i$ называется минимальным $\mathfrak{L}$-композиционным спутником $\mathfrak{F}$. Для произвольной совокупности $\mathfrak{L}$-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают $\vee^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\,(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая система $\mathfrak{L}$-композиционных спутников. Тогда через $\vee(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что $f(A) = \mathrm{form}\,(\bigcup_{i\in I} f_i(A))$ для всех $A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$. В частности, $(f_1 \vee f_2)(A) = \mathrm{form}\,(f_1(A) \bigcup f_2(A))$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(A) \neq \varnothing$. Если же $f_i(A) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(A) = \varnothing$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольный класс групп. Тогда $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_{c^{\mathfrak{L}}}$-критической [15] или иначе минимальной $\mathfrak{L}$-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией [16], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной $\mathfrak{L}$-композиционной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. В частности, если $\mathfrak{L}$-композиционная формация $\mathfrak{F}$ ненильпотентна, но нильпотентна каждая ее собственная $\mathfrak{L}$-композиционная подформация, то $\mathfrak{F}$ называют минимальной $\mathfrak{L}$-композиционной ненильпотентной формацией. Максимальной $\mathfrak{L}$-композиционной подформацией $\mathfrak{L}$-композиционной формации $\mathfrak{F}$ называется всякая такая ее собственная $\mathfrak{L}$-композиционная подформация $\mathfrak{M}$, что для любой $\mathfrak{L}$-композиционной подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ выполняется $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$. Напомним, что решетка называется модулярной, если для любых элементов x, y, z решетки из $x \leq z \Longrightarrow x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge z$. Пусть L — решетка с нулем 0 и 1, и пусть $a \in L$. Элемент b называется дополнением элемента a в L, если $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Решетка L с нулем 0 и единицей 1 называется: решеткой с дополнениями, если каждый ее элемент имеет дополнение; решеткой с относительными дополнениями, если каждый ее интервал $[a, b]$ является решеткой с дополнениями. Атом решетки — это ее наименьший ненулевой элемент, т.е. если $0 < a$, то в L не существует x такого, что $0 < x < a$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация. Тогда символом $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ обозначается такая подрешетка решетки $c^{\mathfrak{L}}$, которая состоит из всех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$. Нильпотентный $c^{\mathfrak{L}}$-дефект (или $\mathfrak{N}_{c^{\mathfrak{L}}}$-дефект) формации $\mathfrak{F}$ — это длина решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$. Напомним, что длина конечной цепи C равна $|C| - 1$. Говорят, что частично упорядоченное множество P имеет длину n и пишут $l(P) = n$, где n — натуральное число, если в P существует цепь длины n и все цепи в P имеют длину $\leq n$.

3. Используемые результаты

Частным случаем теоремы 1 из работы [11] является

Лемма 1. *Пусть f — минимальный $\mathfrak{L}$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ и H — канонический $\mathfrak{L}$-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{c^{\mathfrak{L}}}$-критической формацией, когда $\mathfrak{F} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом R, что либо $\mathcal{K}(R) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$ и $f(\mathfrak{L}')$ — $(H(\mathfrak{L}'))_{c^{\mathfrak{L}}}$-критическая формация, либо $\mathcal{K}(R) \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, $C_G(R) \subseteq R \not\subseteq \Phi(G)$ и $f(A)$ — $(H(A))_{c^{\mathfrak{L}}}$-критическая формация, где $A \in \mathcal{K}(R)$.*

Приведем в качестве леммы замечание, сделанное на странице 796 работы [4].

Лемма 2 [4, с.796]. *Если $\mathfrak{F}$ — однопорожденная $c_n^{\mathfrak{L}}$-формация ($n \geq 0$), то в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество разрешимых n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций, а также лишь конечное множество наследственных n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций.*

Нам понадобится следующий частный случай леммы 5 работы [4].

Лемма 3. *Если* $\mathfrak{F} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ *и* f *— минимальный* $\mathfrak{L}$*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\mathfrak{L}') = \mathrm{form}\,(G/G_{E\mathfrak{L}} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(A) = \mathrm{form}\,(G/C^A(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}$;

3) $f(A) = \varnothing$ *для всех* $A \in \mathfrak{L} \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{F})$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(h)$, *то* $f(Z_p) = \mathrm{form}\,(G \mid G \in h(Z_p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1)$ *для всех* $Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}^+$; $f(A) = \mathrm{form}\,(G \mid G \in h(A) \cap \mathfrak{F}$ *и* $\mathrm{Soc}\,(G) \in E(A))$ *для всех* $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}^-$ *и* $f(\mathfrak{L}') = \mathrm{form}\,(G \mid G \in h(\mathfrak{L}') \cap \mathfrak{F}$ *и* $G_{E\mathfrak{L}} = 1)$;

5) $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \mathcal{K}(\mathfrak{F})$.

Лемма 4 [2]. *Пусть* A *— монолитическая группа с неабелевым монолитом,* $\mathfrak{M}$ *— некоторая* τ*-замкнутая полуформация и* $A \in l_n^{\tau}\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. *Тогда* $A \in \mathfrak{M}$.

Лемма 5 [17]. *Пусть* G *— группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) G *— разрешимая бипримарная группа;*

2) $G^{\mathfrak{N}}$ *является силовской* q*-подгруппой в* G, q *— простое число;*

3) $G/G^{\mathfrak{N}}$ *— циклическая* p*-группа,* p *— простое число;*

4) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ *— главный фактор группы* G, *причем если* $|G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})| = q^b$, *то* $q^b \equiv 1(mod\, p)$ *и* b *есть показатель числа* q *по модулю* p;

5) Если $P =< a >$ *— силовская* p*-подгруппа из* G, *то* $a^p \in Z(G)$;

6) Если $G^{\mathfrak{N}}$ *абелева, то* $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$.

Лемма 6 [13]. *В том и только том случае* $\mathfrak{L}$*-композиционная ненильпотентная формация* $\mathfrak{F}$ *имеет нильпотентную максимальную* $\mathfrak{L}$*-композиционную подформацию, когда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M}$ *—* $\mathfrak{L}$*-композиционная нильпотентная формация,* $\mathfrak{H}$ *— минимальная* $\mathfrak{L}$*-композиционная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая $\mathfrak{L}$*-композиционная нильпотентная подформация из* $\mathfrak{F}$ *входит в* $\mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая $\mathfrak{L}$*-композиционная ненильпотентная подформация* $\mathfrak{F}_1$ *из* $\mathfrak{F}$ *имеет вид* $\mathfrak{H} \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Лемма 7 [12]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *—* ω*-композиционные формации и одна из формаций* $\mathfrak{F}$ *или* $\mathfrak{H}$ *разрешима. Тогда если* $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$, *то в* $\mathfrak{F}$ *имеется по крайней мере одна минимальная* ω*-композиционная не* $\mathfrak{H}$*-подформация.*

Лемма 8 [14]. *Пусть* $\Omega = \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ *— некоторый набор минимальных* $\mathfrak{L}$*-композиционных ненильпотентных формаций.* $\mathfrak{M}$ *—* $\mathfrak{L}$*-композиционная нильпотентная формация. Тогда, если* $\mathfrak{H}$ *— некоторая минимальная* $\mathfrak{L}$*-композиционная ненильпотентная подформация из* $\mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}}\mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, *то* $\mathfrak{H} \in \Omega$.

Лемма 9 [4]. *Для любого непустого множества простых групп* $\mathfrak{L}$ *и любого целого неотрицательного* n *решетка* $c_n^{\mathfrak{L}}$ *алгебраична и модулярна.*

Лемма 10 [18, с.27]. *Подрешетка модулярной решетки модулярна.*

Лемма 11 [18, с.31]. *Любая модулярная решетка* M *с дополнениями является решеткой с относительными дополнениями.*

Лемма 12 [19]. *Любая модулярная решетка* L *с дополнениями, имеющая конечное число атомов, является решеткой конечной длины.*

Лемма 13 [18, с.32]. *В решетке* L *конечной длины с относительными дополнениями каждый элемент* a *является объединением содержащихся в нем атомов.*

4. Основной результат

Из теоремы 1 [20], с учетом леммы 1, вытекает следующая

Лемма 14. *Формация $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является минимальной $\mathfrak{L}$-композиционной ненильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$, что либо $\mathcal{K}(P) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$, либо $\mathcal{K}(P) \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [P]Q$ — группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, $p \in \pi(\mathfrak{L}^+)$ и $|Q| = q$ — простое число;

2) P — неабелева группа.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathfrak{F} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, G$ для некоторой группы G. Тогда из леммы 2 получаем, что в $\mathfrak{F}$ содержится лишь конечное множество разрешимых (в частности, нильпотентных) $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций.

Ввиду леммы 14 каждая минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, H$, где H — такая монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P = H^{\mathfrak{N}}$, что либо $\mathcal{K}(P) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$, либо $\mathcal{K}(P) \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $H = [P]Q$ — группа Шмидта с $\Phi(H) = 1$, где $P = C_H(P)$ — абелева p-группа, $p \in \pi(\mathfrak{L}^+)$ и $|Q| = q$ — простое число;

2) P — неабелева группа.

Пусть f — минимальный $\mathfrak{L}$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Из леммы 3 имеем

$$f(S) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/C^A(G)), \text{ если } S = A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}; \\ \mathrm{form}(G/G_{E\mathfrak{L}}), \text{ если } S = \mathfrak{L}'; \\ \varnothing, \text{ если } S = A \in \mathfrak{L} \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{K}(P) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$. Тогда $H_{E\mathfrak{L}} = 1$. Следовательно, $H \simeq H/H_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}') = \mathrm{form}(G/G_{E\mathfrak{L}}) = \mathrm{form}(\mathrm{H}(G/G_{E\mathfrak{L}}))$. Если P — неабелев монолит группы H, то по лемме 4 H изоморфна некоторому гомоморфному образу группы $G/G_{E\mathfrak{L}}$. Ввиду того, что G — конечная группа, получаем, что $G/G_{E\mathfrak{L}}$ конечна. Значит, $G/G_{E\mathfrak{L}}$ имеет конечное число гомоморфных образов. Следовательно, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций вида $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, H$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{N}}$, что P — неабелева $E\mathfrak{L}'$-группа.

Пусть P — абелева группа. Так как $H/P = H/H^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$, то H — разрешимая группа. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций вида $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, H$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{N}}$, что P — абелева $E\mathfrak{L}'$-группа. Следовательно, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций вида $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, H$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{N}}$, что $\mathcal{K}(P) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$.

Пусть теперь $\mathcal{K}(P) \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$ и относительно H выполняется условие 1). Тогда по лемме 5 H разрешима. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций вида $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, H$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{N}}$, что $\mathcal{K}(P) \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$ и выполняется условие 1).

Пусть относительно группы H выполняется условие 2). Тогда $C^A(H) = 1$. Следовательно, $H \simeq H/C^A(H) \in f(A) = \mathrm{form}\,(G/C^A(G)) = \mathrm{form}\,(\mathrm{H}(G/C^A(G)))$. Так как P — неабелев монолит группы H, то по лемме 4 $H \in \mathrm{H}(G/C^A(G))$, т.е. H изоморфна некоторому гомоморфному образу группы $G/C^A(G)$. Ввиду того, что G — конечная группа, получаем, что $G/C^A(G)$ конечна. Значит, $G/C^A(G)$ имеет конечное число гомоморфных образов. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций вида $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\, H$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{N}}$, что P — неабелева $E\mathfrak{L}$-группа.

Таким образом, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная ненильпотентная $\mathfrak{L}$-композиционная подформация в $\mathfrak{F}$, содержащая нильпотентную максимальную $\mathfrak{L}$-композиционную подформацию. По лемме 6 $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая $\mathfrak{L}$-композиционная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация. Значит из доказанного выше следует, что в $\mathfrak{F}$ содержится лишь конечное множество $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций с нильпотентным дефектом 1. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{L} = \mathfrak{I}$ из теоремы 1, получаем

Следствие 1.1. *В каждой ненильпотентной однопорожденной композиционной формации содержится лишь конечное множество композиционных подформаций с нильпотентным дефектом 1.*

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная ненильпотентная $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$, когда $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$. Тогда длина решетки $\mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ равна 1. Значит, формация $\mathfrak{M}$ обладает нильпотентной максимальной $\mathfrak{L}$-композиционной подформацией. Применяя лемму 6, имеем $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}) \vee^{\mathfrak{L}}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$.

Достаточность. Предположим противное. Пусть найдется такая $\mathfrak{L}$-композиционная формация $\mathfrak{R}$, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$. Ввиду того, что $\mathfrak{R}$ не содержится в $\mathfrak{N}$, по лемме 7 получаем, что формация $\mathfrak{R}$ имеет минимальную $\mathfrak{L}$-композиционную ненильпотентную подформацию $\mathfrak{H}_1$. Тогда $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$. Следовательно, по лемме 8 $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{R}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Ввиду леммы 9, решетка всех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций модулярна, значит, по лемме 10 решетка $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ также модулярна, как подрешетка модулярной решетки. По условию решетка $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ является решеткой с дополнениями, значит, по лемме 11 $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ — модулярная решетка с относительными дополнениями. Используя теорему 1 и лемму 15, получаем, что решетка $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ имеет конечное число атомов. Значит, по лемме 12 решетка $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ имеет конечную длину. Из леммы 13 получаем, что каждый элемент $\mathfrak{M}$ решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ является объединением содержащихся в нем атомов. По лемме 15 любой атом $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$ решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ имеет вид $\mathfrak{M}_i = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i$, где $\mathfrak{H}_i$ — некоторая минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$. Из вышесказанного имеем $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$, а значит, всякая $\mathfrak{H}_i \subseteq \mathfrak{M}$, $i \in I$. Следовательно, $\mathfrak{M} = \vee^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_i = \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{L} = \mathfrak{I}$, из теоремы 2 получаем

Следствие 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — ненильпотентная однопорожденная композиционная формация и $\mathfrak{F}/_c\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ — решетка с дополнениями. Тогда каждый элемент $\mathfrak{M}$ решетки $\mathfrak{F}/_c\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ представим в виде $\mathfrak{M} = \vee_c((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee_c \mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех минимальных композиционных ненильпотентных формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$.

Abstract. The paper studies the properties of one-generated $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups.

Литература

1. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба // М.: Наука, 1989.

2. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба // Мн.: Беларуская навука, 1997.

3. Шеметков, Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фитинга конечных групп / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба // Матем. Труды, 1999. — Т. 2, № 2. — С. 144–147.

4. Шеметков, Л. А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба // Украинский математический журнал, 2000. — Т. 52, № 6. — С. 783–797.

5. Сафонов. В. Г. Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп / В. Г. Сафонов // Сибирский математический журнал, январь- февраль, 2007 — Т. 48, № 1.

6. Сафонов, В. Г. О кратно локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом / В. Г. Сафонов // Вопросы алгебры, 1996, — №3. — С. 8–12.

7. Сафонов, В. Г. О приводимых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины, 2005. — №5 (32). — С. 162–165.

8. Шабалина, И. П. Об одном свойстве ненильпотентной однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации / И. П. Шабалина // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 2006. — №5(38).

9. Сафонов, В.Г. Частично насыщенные формации с π-нильпотентным дефектом 1 / В. Г. Сафонов, А. И. Рябченко // Вестник Мозырьского государственного педагогического университета, Мозырь, 2005. — № 2(13). — С. 16–20.

10. Рябченко, А. И. Частично насыщенные формации с π-специальным дефектом 1 / А. И. Рябченко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины, 2006, № 5. — С. 59–68.

11. Скиба, А.Н. О $\mathfrak{H}_{\Theta\mathfrak{L}}$-критических формациях / А. Н. Скиба, И. В. Близнец // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, 1999. — № 1. — С. 140–144.

12. Близнец, И. В. Об одном классе $\mathfrak{L}$-композиционных формаций / И. В. Близнец // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 1999. — № 1(15). — С. 116–120.

13. Zhiznevsky, P.A. On $\mathfrak{L}$-composition non-nilpotent formations with maximal nilpotent subformation / P. A. Zhiznevsky, V. G. Safonov // 6th International Algebraic Conference in Ukraine July 1–7, 2007, Kamyanets-Podilsky, Ukraine. — С. 179–180.

14. Жизневский, П.А. В.Г. Сафонов Формации групп с максимальной $\mathfrak{L}$-композиционной нильпотентной подформацией / П. А. Жизневский, В. Г. Сафонов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки, 2007. — № 9. — С. 30–36.

15. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1980. — № 4. — С. 27–33.

16. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л. А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп, Киев, 1980. — С. 37–50.

17. Шмидт О. Ю. Группы, все полгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Матем. сб., 1924. — Т. 31. — С. 366–372.

18. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф // М.: Наука, 1984.

19. Жевнова, Н. Г. ω-локальные формации с дополняемыми подформациями / Н. Г. Жевнова // Автореф. дис. "ω-локальные формации с дополняемыми подформациями" к-та физ.-мат. наук: Д 02.12.01; Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины, Гомель, 1997. — 17 с.

20. Близнец, И. В. Об одном типе критических формаций / И. В. Близнец // Международная алгебраическая конференция, посвященная 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова: Тезисы докладов, Гомель, 9–11 июля 2007г. / Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины. — Гомель, ГГУ, 2007. — С. 44–45.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.12.07