Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №2 (41), 2006

Математика

УДК 512.541.8

Новое доказательство теоремы о конечно порождённых абелевых группах

О. М. Адарченко, Л. А. Шеметков

В этой заметке мы даем краткую схему нового доказательства следующей хорошо известной теоремы.

Теорема. *Каждая конечно порождённая абелева группа является прямым произведением циклических подгрупп.*

При доказательстве следующих лемм используются лишь элементарные свойства циклических групп.

Лемма 1 (лемма 3 из [1]). *Пусть G – конечная нециклическая абелева группа, все собственные подгруппы которой циклические. Тогда $G = A \times B$, где $|A| = |B| = p$ – простое число.*

Лемма 2. *Пусть бесконечная абелева группа G является произведением двух циклических подгрупп, пересечение которых отлично от 1. Тогда G является прямым произведением конечной циклической группы и бесконечной циклической группы.*

Доказательство. Пусть t – наименьшее натуральное число со следующим свойством:

$$G = <a><b>,\ 1 = a^m b^n,\ m \neq 0,\ n \neq 0,\ |m| + |n| = t.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $0 < m \leq |n|$.

По алгоритму деления, $n = mq + r$, где $0 \leq r < m$. Тогда $G = <ab^q, b>$ и $1 = (ab^q)^m b^r$, $m + r < t$. Следовательно, $r = 0$, ввиду выбора t. Таким образом, $G = <ab^q> \times <b>$.□

Лемма 3. *Пусть G – конечно порождённая абелева группа, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – её порождающее множество с наименьшим числом элементов бесконечного порядка. Пусть x_n – элемент наибольшего порядка группы G. Тогда подгруппа $<x_n>$ дополняема в G, т. е. $G = <x_n> B$ и $<x_n> \cap B = 1$.*

Доказательство. Будем считать, что $o(x_1) \leq o(x_2) \leq \ldots \leq o(x_n)$. Пусть $r \geq 0$ – число всех элементов конечного порядка в $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ввиду леммы 2, имеем $<x_i> \cap <x_j> = 1$, если $i \neq j$ и $i > r$, $j > r$. Учитывая лемму 1 и лемму 2, замечаем, что в G имеется неединичная циклическая подгруппа Q такая, что $Q \cap <x_n> = 1$. По индукции, $G/Q = <x_n> Q/Q \times B/Q$. Отсюда вытекает, что $G = <x_n> B$ и $<x_n> \cap B = 1$. □

Доказательство теоремы. Пусть $G = <x_1, x_2, \ldots, x_n>$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – такие же, как в лемме 3. Тогда $G = <x_n> B$ и $<x_n> \cap B = 1$. По индукции, B разлагается в прямое произведение циклических подгрупп. А значит, для G теорема верна.□

Abstract. A simple way of proving the fundamental theorem for finitely generated abelian groups is given in the paper.

Литература

1. Адарченко О. М. Новое доказательство теоремы о конечных абелевых группах // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. – 2006. – №4(37). С – 178–179.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 25.12.06