Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(41), 2007

УДК 512.542

Конечные группы, у которых все элементы простого порядка содержатся в подгруппе Фраттини

В. Н. Тютянов

Следуя Л.А. Шеметкову, элемент $x \neq 1$ конечной группы G назовем Q-центральным, если в G найдется такая нормальная подгруппа K, что xK — неединичный элемент из $Z(G/K)$. В работе [1] доказано, что конечная группа G p-нильпотентна, если $p > 2$ и в группе G все ее элементы порядка p являются Q-центральными. В данной работе получены и другие результаты о группах с обобщенно центральными элементами. На Гомельском семинаре Л.А. Шеметков поставил вопрос об усилении этих результатов путем наложения условия обобщенной центральности лишь на элементы, не содержащиеся в подгруппе Фраттини исследуемой группы. В частности, Л.А. Шеметковым был поставлен следующий вопрос. Пусть G — конечная группа, у которой все элементы простого порядка содержатся в подгруппе Фраттини. Верно ли, что G является разрешимой группой?

В настоящей работе показано, что ответ на данный вопрос отрицательный и приведены примеры неразрешимых групп, у которых все элементы простого порядка содержатся в подгруппе Фраттини.

Рассматриваются только конечные группы. Если n — некоторое натуральное число, то $\pi(n)$ обозначает множество всех простых делителей числа n. Для конечной группы G определим $\pi(G) = \pi(|G|)$, где $|G|$ — порядок группы G. Если $p \in \pi(G)$, то $Syl_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп группы G. $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, $M(G)$ — мультипликатор Шура группы G. Остальные обозначения и определения можно найти, например, в [2-5]. Обозначим $\mathcal{R} = \{PSL_2(p)$, где p – любое простое число, большее 3 и для всех $r \in \pi(PSL_2(p))\setminus\{2\}$ число r^2 не делит $|PSL_2(p)|\}$. Отметим, что $\mathcal{R} \neq \emptyset$ так как, например, $PSL_2(5), PSL_2(7) \in \mathcal{R}$.

Пусть G — конечная группа. Расширением группы G при помощи группы V называется короткая точная последовательность групп

$$E: \ 1 \longrightarrow V \xrightarrow{\ i\ } \widetilde{G} \xrightarrow{\ p\ } G \longrightarrow 1.$$

Если V — абелева группа, то $\widetilde{G}$ действует на V посредством сопряжений, поскольку V вложена в $\widetilde{G}$ как нормальная подгруппа. В то же время действие V на себе тривиально, таким образом, возникает индуцированное действие фактор-группы $\widetilde{G}/V$ на V. Следовательно, расширение E естественным образом определяет действие группы G на V, делающее V G-модулем. Расширение называется неприводимым, если группа G действует неприводимо на V.

Приведем следующие вспомогательные утверждения.

(1) (2.8.8 [2]). *Пусть $G \cong SL_2(p)$, где p — нечетное простое число. Тогда все силовские подгруппы нечетного порядка в группе G являются циклическими, а силовская 2-подгруппа является обобщенной кватернионной.*

(2) (V.25.7 [3]). *Пусть $G \in \mathcal{R}$. Тогда мультипликатор Шура $M(G) \cong Z_2$.*

(3) *Пусть G — конечная группа, $r \in \pi(G)$ и силовская r-подгруппа в G циклическая порядка r. Тогда существует нерасщепимое неприводимое расширение*

$$E: \ 1 \longrightarrow W \xrightarrow{\ i\ } \widetilde{G} \xrightarrow{\ p\ } G \longrightarrow 1$$

где W — абелева r-группа.

Доказательство. Пусть $R \in Syl_r(G)$ и $\widetilde{R} \cong Z_{r^2}$. Тогда расширение

$$E_1: \quad 1 \longrightarrow Z_r \xrightarrow{i} \widetilde{R} \xrightarrow{p} R \longrightarrow 1,$$

будет нерасщепимым. Поэтому $H^2(R, Z_r) \neq 0$. Обозначим $V = Z_r$. По лемме Шапиро ([4], §3.6) $H^2(R, V) \cong H^2(G, V^G)$, где V^G — индуцированный модуль. Следовательно, $H^2(G, V^G) \neq 0$ и расширение

$$E_2: \quad 1 \longrightarrow V^G \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1,$$

является нерасщепимым. Пусть

$$1 \longrightarrow M' \longrightarrow V^G \longrightarrow M'' \longrightarrow 1,$$

есть точная последовательность G–модулей. Тогда

$$H^2(G, M') \longrightarrow H^2(G, V^G) \longrightarrow H^2(G, M''),$$

является точной последовательностью. Поэтому, если $H^2(G, M') = 0$ и $H^2(G, M'') = 0$, то $H^2(G, V^G) = 0$. Значит, если $H^2(G, V^G) \neq 0$, то существует композиционный фактор M_1 в V^G такой, что $H^2(G, M_1) \neq 0$. Утверждение доказано.

(4) *Пусть $G \in \mathcal{R}$ и $r \in \pi(G)\backslash\{2\}$. Если существует неприводимое нерасщепимое расширение групп*

$$E: \quad 1 \longrightarrow V \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1,$$

где V — абелева r-группа, то

1. $V = \Phi(\widetilde{G})$.

2. Все элементы простого порядка r группы $\widetilde{G}$ содержатся в V.

Доказательство. Докажем первый пункт утверждения. Пусть $\widetilde{M}$ — произвольная максимальная подгруппа в $\widetilde{G}$. Предположим, что $V \not\subseteq \widetilde{M}$. Тогда в силу максимальности $\widetilde{M}$ в $\widetilde{G}$ имеет место факторизация $\widetilde{G} = V\widetilde{M}$. Если $V \cap \widetilde{M} = 1$, то расширение E является расщепимым, что невозможно. Поэтому $V_0 = V \cap \widetilde{M} \neq 1$. Из факторизации $\widetilde{G} = V\widetilde{M}$ и абелевости V следует, что $\widetilde{G}$ также нормализует подгруппу V_0. Поскольку расширение E неприводимо, то $V_0 = V \subseteq \widetilde{M}$. Противоречие с тем, что $V \not\subseteq \widetilde{M}$. Таким образом, всякая максимальная подгруппа в $\widetilde{G}$ содержит V. Поэтому $V \subseteq \Phi(\widetilde{G})$. Так как G — простая неабелева группа, то $V = \Phi(\widetilde{G})$.

Докажем второй пункт утверждения. Согласно (1) и определению множества $\mathcal{R}$, силовские r-подгруппы в группе G являются циклическими порядка r. Пусть $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ и $|\widetilde{g}| = r$. Предположим, что $\widetilde{g} \notin V$. Тогда $V\leftthreetimes < \widetilde{g} > \in Syl_r(\widetilde{G})$. По теореме 15.8.6 [5] расширение E расщепимо, что невозможно. Следовательно, $\widetilde{g} \in V$. Утверждение доказано.

Построим пример неразрешимой группы, у которой все элементы простого порядка содержатся в подгруппе Фраттини.

Пусть $G \cong PSL_2(r) \in \mathcal{R}$ и $t = |\pi(G)\backslash\{2\}|$. Обозначим через $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t\}$ — множество, состоящее из элементов множества $\pi(G)\backslash\{2\}$. По (1) и (2) существует неприводимое нерасщепимое центральное расширение

$$E_1: \quad 1 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{i_1} \widetilde{G_1} \xrightarrow{p_1} G \longrightarrow 1,$$

где $\widetilde{G_1} \cong SL_2(r)$, а $V_1 = M(G) \cong Z_2$. При этом очевидно, что $V_1 = \Phi(\widetilde{G_1})$, а так как силовская 2-подгруппа в $SL_2(r)$ обобщенная кватернионная, то единственная инволюция группы $\widetilde{G_1}$ содержится в V_1

Согласно (3), существуют неприводимые нерасщепимые расширения

$$
\begin{aligned}
E_{\omega_1}: &\ 1 \longrightarrow V_{\omega_1} \xrightarrow{i_{\omega_1}} \widetilde{G_{\omega_1}} \xrightarrow{p_{\omega_1}} G \longrightarrow 1,\\
E_{\omega_2}: &\ 1 \longrightarrow V_{\omega_2} \xrightarrow{i_{\omega_2}} \widetilde{G_{\omega_2}} \xrightarrow{p_{\omega_2}} G \longrightarrow 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
E_{\omega_t}: &\ 1 \longrightarrow V_{\omega_t} \xrightarrow{i_{\omega_t}} \widetilde{G_{\omega_t}} \xrightarrow{p_{\omega_t}} G \longrightarrow 1,
\end{aligned}
$$

где V_{ω_i} — примарные абелевы ω_i-группы для всех $\omega_i \in \Omega$. Согласно (4), $V_{\omega_i} = \Phi(\widetilde{G_{\omega_i}})$ и все элементы простых порядков ω_i содержатся в V_{ω_i}.

Рассмотрим прямое произведение $\widetilde{G_1} \times \widetilde{G_{\omega_1}} \times \cdots \times \widetilde{G_{\omega_t}} = \widetilde{G}$ с элементами $(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_{\omega_1}}, ..., \widetilde{x_{\omega_t}})$, где $\widetilde{x_1} \in \widetilde{G_1}$, $\widetilde{x_{\omega_i}} \in \widetilde{G_{\omega_i}}$ для всех $\omega_i \in \Omega$. Пусть $\widetilde{K}$ — подгруппа в $\widetilde{G}$, определенная следующим образом:

$$\widetilde{K} = \{(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_{\omega_1}}, ..., \widetilde{x_{\omega_t}}) \mid p_1(\widetilde{x_1}) = p_{\omega_1}(\widetilde{x_{\omega_1}}) = \ldots = p_{\omega_t}(\widetilde{x_{\omega_t}})\}.$$

Из определения группы $\widetilde{K}$ следует, что $V = V_1 \times V_{\omega_1} \times ... \times V_{\omega_t} \triangleleft \widetilde{K}$, $G = \widetilde{K}/V \cong PSL_2(r)$, а расширение

$$E: \ 1 \longrightarrow V_1 \times V_{\omega_1} \times ... \times V_{\omega_t} \xrightarrow{i} \widetilde{K} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1,$$

такое, что $V = \Phi(\widetilde{K})$ и для всех $t \in \pi(\widetilde{K})$ элементы простого порядка t из $\widetilde{K}$ содержатся в V. Таким образом, $\widetilde{K}$ является неразрешимой группой, у которой все элементы простого порядка содержатся в подгруппе Фраттини.

Abstract. The paper presents finite groups all elements of prime order of which are contained in the Frattini subgroup.

Литература

1. Аль-Шаро Х.А., Шеметков Л.А. О подгруппах простого порядка в конечной группе // Укр. матем. журн. 2002. — Т. 54, №6, — С. 745–752.
2. Gorenstein D. Finite groups. New.-York.: Harper and Row. 1968.
3. Huppert B. Endliche Gruppen. Berlin.: Springer-Verlag, 1967.
4. Браун К. Когомологии групп. Москва.: Наука, 1987.
5. Холл М. Теория групп. Москва.: И.Л., 1962.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 27.09.07