Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2

В. С. Монахов, А. А. Трофимук

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Согласно теореме Цассенхауза ([1], теорема IV.2.11), группа с циклическими силовскими подгруппами содержит циклическую холлову подгруппу, фактор-группа по которой также циклическая.

Натуральное число n называется свободным от кубов, если p^3 не делит n для всех простых p. В работе [2] на основе системы компьютерной алгебры GAP разработан алгоритм для определения числа неизоморфных групп фиксированного порядка, свободного от кубов. При составлении алгоритма использовались свойства фраттиниевых расширений групп, автоморфизмов и того факта, что простая неабелева группы порядка, свободного от квадратов, изоморфна $PSL(2,p)$, $p > 3$ — простое число такое, что числа $p-1$ и $p+1$ свободны от кубов. Информации о строении разрешимых групп порядка, свободного от кубов, статья [2] не содержит.

В настоящей работе исследуется строение группы, в которых силовские подгруппы либо циклические, либо имеют порядок p^2. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа либо циклическая, либо имеет порядок p^2. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если группа G разрешима, то:*

(*a*) *производная длина группы G не превышает 3;*

(*b*) *G — дисперсивная группа;*

(*c*) *$\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре;*

(*d*) *$2'$-холлова подгруппа метабелева;*

(*e*) *если группа G не дисперсивна по Оре, то существует нормальная подгруппа N такая, что фактор-группа G/N изоморфна знакопеременной группе A_4 степени 4.*

2. *Если G — неразрешимая группа, то $G = A \times B$, где A — разрешимая подгруппа, $B \cong PSL(2,r)$, r — простое число и $r \equiv \pm 3 \pmod 8$. Кроме того, если порядок G свободен от кубов, то числа $r-1$ и $r+1$ свободны от кубов.*

Примеры. 1. Пусть E_{5^2} — элементарная абелева группа порядка 5^2. Её группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,5)$, в которой имеется подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Полупрямое произведение $G = [E_{5^2}]S_3$ является группой порядка, свободного от кубов. Производная длина группы G равна 3. Следовательно, оценка производной длины, полученная в теореме, является точной.

2. Пример знакопеременной группы A_4 указывает на то, что разрешимая группа, порядок которой свободен от кубов, не обязана быть дисперсивной по Оре.

3. Пусть G — простая группа $PSL(2,53)$. Ее порядок равен

$$(1/2)53(53-1)(53+1) = 2^2 3^3 13 \cdot 53.$$

Силовская 3-подгруппа в группе $PSL(2,53)$ — циклическая, силовская 2-подгруппа — элементарная абелева порядка 4, а силовские 13-подгруппа и 53-подгруппа имеет простые порядки. Группа $PSL(2,53)$ удовлетворяет условию теоремы, но число $53+1 = 3^3 2$ не свободно от кубов. Поэтому в общем случае теоремы числа $r-1$ и $r+1$ для группы $PSL(2,r)$ не обязаны быть свободными от кубов.

Напомним, что метабелевой называют группу, производная длина которой не превышает 2. Циклическая группа порядка n обозначается через C_n. Запись $G=[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Через G' обозначается коммутант группы G, а $G^{(i)}=(G^{(i-1)})'$ — i-й коммутант. Наименьшее натуральное число n, для которого выполняется равенство $G^{(n)}=1$, называют производной длиной группы G и обозначают через $d(G)$.

Говорят, что группа G дисперсивна, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре называется группа G порядка

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n},\ p_1>p_2>\ldots>p_n,$$

у которой для каждого $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ имеется нормальная подгруппа порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_i^{\alpha_i}$. Дисперсивная по Оре группа G p-замкнута для наибольшего $p\in\pi(G)$ и q-нильпотентна для наименьшего $q\in\pi(G)$.

В доказательствах будут использоваться фрагменты факты из теории формаций. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация групп и G — группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N\in\mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\{G\in\mathfrak{G}\mid G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2=\mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$ следует, что $G\in\mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно. Примитивной называют группу, которая содержит максимальную подгруппу с единичным ядром. В примитивной группе максимальная подгруппа с единичным ядром называется примитиватором.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.*

Доказательство. Согласно [3], с. 36, произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация — эквивалентные понятия [4], то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и G — группа. Предположим, что $G\notin\mathfrak{F}$, но $G/N\in\mathfrak{F}$ для всех $N\lhd G$, $N\neq 1$. Тогда G — примитивная группа.*

Доказательство вытекает из фигурирующих в формулировке определений.

Лемма 3. ([5], теоремы 4.40–4.42) *Пусть G — разрешимая неединичная примитивная группа с примитиватором M. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\Phi(G)=1$;*

(2) *$F(G)=C_G(F(G))=O_p(G)$ и $F(G)$ есть элементарная абелева подгруппа порядка p^n для некоторого простого p и натурального n;*

(3) *G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, которая совпадает с $F(G)$;*

(4) *$G=[F(G)]M$ и $O_p(M)=1$;*

(5) *фактор-группа $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы $GL(n,p)$.*

Лемма 4. 1. *Если H — p'-подгруппа нечетного порядка группы $GL(2,p)$, то H абелева.*

2. *Если H — разрешимая p'-подгруппа группы $GL(2,p)$ и для каждого $q\in\pi(H)$ силовская q-подгруппа в H циклическая, или порядка q^2, то H метабелева.*

3. *В группе $GL(2,p)$ нет простых неабелевых подгрупп.*

Доказательство. Утв. 1 — это теорема 5.2 [6].

Докажем утв. 2. Пусть H — p'-подгруппа группы $GL(2,p)$ и для каждого $q \in \pi(H)$ силовская q-подгруппа в H циклическая, или порядка q^2. Из утв. 1 следует, что $2'$-холлова подгруппа $H_{2'}$ в H абелева. Теперь $H = H_2 H_{2'}$ и по теореме 4.9 [5] подгруппа H метабелева.

Докажем утв. 3. Предположим, что простая неабелева подгруппа K содержится в $GL(2,p)$. Так как $SL(2,p) \triangleleft GL(2,p)$, $GL(2,p)/SL(2,p) \simeq C_{p-1}$, то $K \subseteq SL(2,p)$. Но в группе $SL(2,p)$ имеется только одна инволюция $-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Так как порядок подгруппы K четен, то $-E \in K$ и $< -E > \triangleleft K$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. ([5], теорема 2.16) 1. *Если H — группа простого порядка p, то группа всех автоморфизмов* $\mathrm{Aut}H$ *циклическая порядка $p-1$.*

2. *Если H — циклическая группа, то группа* $\mathrm{Aut}H$ *абелева.*

Лемма 6. *Пусть G — нильпотентная группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа либо циклическая, либо имеет порядок p^2. Тогда группа G абелева.*

Доказательство. Утверждение вытекает из того факта, что каждая подгруппа порядка p^2 абелева.

Лемма 7. *Если G — разрешимая примитивная группа и $F(G) = E_4$, то $G \simeq A_4$ или S_4.*

Доказательство. Пусть M — примитиватор группы G. Тогда по лемме 3 группа $G = [F]M$, где $F = F(G)$ и $M \leq GL(2,2) \simeq S_3$. Поэтому либо $M \simeq Z_3$, либо $M \simeq S_3$. Представление группы G перестановками на множестве левых смежных классов группы G по подгруппе M будет точным степени 4, поэтому группа G изоморфна подгруппе порядка 12 или 24 из симметрической группы S_4. Ясно, что $G \simeq A_4$ или S_4. Лемма доказана.

Лемма 8. ([7], лемма 2) *Разрешимая группа с циклической подгруппой Фиттинга сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая группа с циклической подгруппой Фиттинга F. Так как $C_G(F) \subseteq F$, то по лемме 5 группа G/F будет абелевой. Теперь по лемме 4.46 [5] группа G сверхразрешима.

Лемма 9. *Если G — простая неабелева группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа либо циклическая, либо имеет порядок p^2, то G изоморфна $PSL(2,r)$, $r > 3$, r — простое число и $r \equiv \pm 3 \pmod 8$.*

Доказательство. Хорошо известно, что в простой неабелевой группе G силовская 2-подгруппа G_2 имеет порядок ≥ 4 и не является циклической. Поэтому G_2 — элементарная абелева группа порядка 4. Согласно теореме [8], стр. 485, группа G изоморфна группе $PSL(2,r^m)$, r^m — нечетное число, $r^m > 3$ и $r^m \equiv \pm 3 \pmod 8$. Поскольку в группе $PSL(2,r^m)$ силовская r-подгруппа элементарная абелева, а остальные силовские подгруппы нечетных порядков циклические, то $m \leq 2$.

Предположим, что $m = 2$. Порядок группы G равен $(1/2)r^2(r^2-1)(r^2+1) = (1/2)r^2(r-1)(r+1)(r^2+1)$. Так как $r-1$ — четное число, то $r-1 = 2k$ для некоторого натурального k. Теперь $r+1 = 2k+2$, $r^2+1 = 4k^2+4k+2$,

$$|G| = (1/2)r^2 2k(2k+2)(4k^2+4k+2) = 4r^2k(k+1)(2k^2+2k+1)$$

и 8 делит порядок группы G. Противоречие с тем, что силовская 2-подгруппа G_2 — элементарная абелева группа порядка 4. Таким образом, $m = 1$. Лемма доказана.

Напомним, что через $R(G)$ обозначается разрешимый радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G.

Лемма 10. *Если G — неединичная группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа либо циклическая, либо имеет порядок p^2, то группа G либо простая, либо $R(G) \neq 1$.*

Доказательство. Если группа G разрешима и неединична, то $R(G) \neq 1$. Пусть G — неразрешимая группа и N — её минимальная нормальная подгруппа. Предположим, что $R(G) = 1$. Подгруппа N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Так как в группе G силовская 2-подгруппа элементарная абелева порядка 4, то N — простая подгруппа. По лемме 9 $N \simeq PSL(2, r)$, где $r > 3$, r — простое число, и $r \equiv \pm 3 \pmod 8$, а G/N — группа нечетного порядка. Пусть $C = C_G(N)$. Тогда $CN/N \cong C/C \cap N \trianglelefteq G/N$ и $C \cap N = Z(N) = 1$. Поэтому подгруппа C имеет нечетный порядок. Теперь $C \subseteq R(G) = 1$ и группа G изоморфна некоторой группе автоморфизмов группы $PSL(2, r)$. Хорошо известно, что $\mathrm{Aut}N = PGL(2, r)$ и $|G : N| = 2$. Если $G \neq N$, то силовская 2-подгруппа в группе G имеет порядок 8 и является нециклической. Противоречие. Поэтому $G = N \cong PSL(2, r)$ — простая группа.

Доказательство теоремы. 1(**a**). Вначале индукцией по порядку группы G докажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. По индукции все нетривиальные фактор-группы группы G принадлежат $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$, а так как по лемме 1 произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ является насыщенной формацией, то по лемме 2 можно считать, что G — примитивная группа. Теперь $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с $F(G)$. Причем $G = [F(G)]M$ и $F(G)$ есть элементарная абелева подгруппа порядка p^n. Подгруппа $F = F(G)$ совпадает со своим централизатором в группе G, и фактор-группа $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов группы F. По условию теоремы силовские p-подгруппы группы G либо циклические, либо имеют порядок p^2. Поэтому $|F|$ делит квадрат некоторого простого числа.

Если порядок F — простое число p, то по лемме 5 группа $\mathrm{Aut}F$ циклическая порядка $p-1$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Если $|F| = p^2$, то $\mathrm{Aut}F = GL(2, p)$ и применимо утв. 2 леммы 4. Поэтому подгруппа M метабелева и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Итак, в любом случае $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Так как все нильпотентные группы, у которых для каждого простого p силовские p-подгруппы либо циклические, либо порядка p^2, по лемме 6 абелевы, то из включения $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ следует, что $G \in \mathfrak{A}^3$. Поэтому $d(G) \leq 3$.

1(**b**). Если подгруппа Фиттинга $F(G)$ циклическая, то G сверхразрешима по лемме 8, а значит, и дисперсивна по Оре. Если $F(G)$ не циклическая, то некоторая её силовская p-подгруппа P не циклическая. Но тогда P — элементарная абелева порядка p^2 и P является силовской p-подгруппой в группе G. По индукции G/P — φ_1-дисперсивна для некоторого упорядочения φ_1 множества $\pi(G/P) = \{q_1, \ldots, q_n\}$, $q_1\varphi_1 q_2 \varphi_1 \ldots \varphi_1 q_n$. Сама группа G будет φ-дисперсивной, где $\pi(G) = \{p, q_1, \ldots, q_n\}$, $p\varphi q_1 \varphi q_2 \varphi \ldots \varphi q_n$.

1(**c**). Применим индукцию по порядку группы G. Пусть $\pi = \pi(G) \setminus \{2, 3\}$ и $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. Если $O_\pi(G) \neq 1$, то по индукции подгруппа $G_\pi / O_\pi(G)$ нормальна в $G/O_\pi(G)$, поэтому G_π нормальна в G. Пусть $O_\pi(G) = 1$. Поскольку класс всех π-замкнутых групп является насыщенной формацией, [3], с.34, то по лемме 2 группа G примитивна. Теперь по лемме 3 в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с $F(G)$, причем $G = [F(G)]H$, подгруппа Фиттинга $F(G)$ есть элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n \leq 2$, H — максимальная подгруппа. Поскольку $O_\pi(G) = 1$, то $F(G)$ является 2-подгруппой или 3-подгруппой.

Предположим, что $F(G)$ — 2-группа. Если $|F(G)| = 2$, то $|G| = 2$, а поэтому $G_\pi = 1$. Если $|F(G)| = 4$, то по лемме 7 группа G изоморфна A_4 или S_4, поэтому $G_\pi = 1$.

Пусть $F(G)$ — 3-группа. Если $|F(G)| = 3$, то H изоморфна подгруппе циклической группы порядка 2, а поэтому $G_\pi = 1$. Если $|F(G)| = 9$, то H изоморфна подгруппе группы $GL(2,3)$. Так как порядок группы $GL(2,3)$ равен 48, то опять $G_\pi = 1$. Таким образом, доказано, что $\{2,3\}'$-холлова подгруппа G_π нормальна в G.

С помощью индукции проверим, что подгруппа G_π дисперсивна по Оре. Если G_π — собственная подгруппа группы G, то G_π дисперсивна по Оре по индукции. Пусть $G_\pi = G$. По доказанному в пункте 1(b) утверждению группа G дисперсивна. Так как класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией, то по лемме 2 группа G примитивна, а по лемме 3 группа $G = [P]H$, где P — силовская p-подгруппа группы G, а H — максимальная подгруппа. Так как по условию теоремы силовские p-подгруппы группы G либо циклические, либо имеют порядок p^2, то $|P|$ делит квадрат простого числа p.

Если порядок P — простое число p, то H изоморфна подгруппе циклической группы порядка $p-1$. Поэтому p — наибольший простой делитель порядка группы G и G дисперсивна по Оре.

Если $|P| = p^2$, то H изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$. Порядок группы $GL(2,p)$ равен $p(p-1)^2(p+1)$. Если p — наибольший простой делитель порядка группы G, то G дисперсивна по Оре по индукции. Предположим,что p не является наибольшим. Тогда $q = p+1$ — наибольший простой делитель порядка группы G. Это возможно, когда $p = 2$, $q = 3$, что противоречит предположению. Значит, π-холлова подгруппа G_π нормальна в G и дисперсивна по Оре.

1(d). По индукции можно считать, что группа G имеет нечетный порядок, а из утверждения (c) следует, что G дисперсивна по Оре. Нам надо доказать, что $G \in \mathfrak{NA}$. Используя индукцию и леммы 1, 2 и 3, заключаем, что группа $G = [P]M$, P — силовкая p-подгруппа, совпадающая с подгруппой Фиттинга группы G и своим централизатором. Теперь подгруппа M изоморфна p'-подгруппе из $\mathrm{Aut}P \in \{C_{p-1}, GL(2,p)\}$. Применяя леммы 4 и 5, получаем, что подгруппа M абелева. Теперь $G \in \mathfrak{NA}$. Так как все нильпотентные группы, силовские p-подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2, абелевы, то из включения $G \in \mathfrak{NA}$ следует, что $G \in \mathfrak{A}^2$. Поэтому $d(G) \leq 2$.

1(e). Предположим, что группа G не содержит фактор-групп, изоморфных A_4. В этой ситуации с помощью индукции по порядку G докажем дисперсивность по Оре группы G.

Предположим, что G не является $\{2,3\}$-группой. По доказанному в пункте (c) π-холлова подгруппа G_π нормальна в G и дисперсивна по Оре для $\pi = \pi(G)\setminus\{2,3\}$. Пусть R — силовская r-подгруппа в G для наибольшего простого $r \in \pi(G)$. Тогда $r > 3$, $R \leq G_\pi$ и R нормальна в G. Если предположить, что фактор-группа G/R содержит нормальную подгруппу N/R такую, что $(G/R)/(N/R) \cong A_4$, то подгруппа N будет нормальной в группе G и фактор-группа $G/N \cong (G/R)/(N/R) \cong A_4$. Имеем противоречие с условием. Поэтому для фактор-группы G/R условия теоремы выполняются и G/R дисперсивна по Оре по индукции. Из того, что r — наибольший простой делитель порядка группы G следует, что группа G дисперсивна по Оре.

Пусть теперь G — $\{2,3\}$-группа. Так как класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией, то по лемме 2 группа G примитивна, а по лемме 3 $G = [F(G)]H$, где $F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, H — максимальная подгруппа. Из дисперсивности группы G следует считать, что $F(G)$ — силовская 2-подгруппа группы G. Теперь $|F(G)| = 4$ и H— подгруппа группы $GL(2,2) \simeq S_3$. Поскольку $F(G)$ — силовская 2-подгруппа группы G, то $|H| = 3$ и $G \simeq A_4$.

2. В силу леммы 9 утв. 2 надо доказать в случае, когда G — неразрешимая непростая группа. По лемме 10 в этой ситуации $R = R(G) \neq 1$, $R(G/R) = 1$ и фактор-группа G/R — простая неабелева группа. По лемме 9 фактор-группа $G/R \cong PSL(2,r)$ для простого r, поэтому R имеет нечетный порядок. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы R, где q — наибольшее простое число из $\pi(R)$. По утв. $1(d)$ R — дисперсивная по Оре группа, следовательно, Q нормальна в G. Рассмотрим фактор-группу G/Q. По предположению индукции $G/Q = A/Q \times B/Q$, $B/Q \cong PSL(2,r)$, $r > 3$, r — простое число, и $r \equiv \pm 3 \pmod 8$.

Если B — собственная подгруппа группы G, то по индукции $B = A_1 \times B_1$, $B_1 \cong PSL(2,r)$ и $Q = A_1$. Таким образом, $G = A \times B_1$, где $B_1 \cong PSL(2,r)$. Значит, следует считать, что $B = G$ и $R = Q$.

Если $C_G(Q) = Q$, то фактор-группа G/Q изоморфна подгруппе из группы $\mathrm{Aut}Q$. Так как силовские q-подгруппы группы G либо циклические, либо порядка q^2, то Q является либо циклической группой, либо элементарной абелевой группой порядка q^2. Если $|Q| = q^2$ и Q — элементарная абелева группа, то G/Q изоморфна q'-подгруппе из $GL(2,q)$. По лемме 4 фактор-группа G/Q не может быть простой неабелевой группой. Если подгруппа Q циклическая, то $\mathrm{Aut}Q$ абелева и опять G/Q — непростая группа, противоречие.

Таким образом, Q — собственная подгрупа в $C_G(Q) = C$. Так как C нормальна в G и G/Q — простая группа, то $C = G$ и подгруппа Q содержится в центре группы G. Если Q — силовская q-подгруппа группы G, то по теореме Шура-Цассенхауза существует подгруппа B такая, что $G = Q \times B$ и $B \cong PSL(2,r)$ и $r \equiv \pm 3 \pmod 8$. Значит следует считать, что Q не является силовской подгруппой группы G, т.е. q делит $|G/Q|$. Пусть G' — коммутант группы G. Так как G/Q — простая группа, то $G'Q/Q = (G/Q)' = G/Q$, т.е. $G'Q = G$. Если Q не содержится в G', то из равенства $G'Q = G$ ввиду теоремы VI.4.6 [1] следует, что силовская q-подгруппа G_q нециклическая. Поэтому $|Q| = q$ и $G = Q \times G'$. Причем $G' \cong PSL(2,r)$ и $r \equiv \pm 3 \pmod 8$. Пусть $Q \subseteq G'$. Тогда $Q = Z(G)$ и $Q \leq G' = G$. По предложению 4.233 [9] $|Q| = 2$. Противоречие. Первое утверждение из пункта 2 доказано.

Пусть порядок группы G свободен от кубов. Тогда, согласно теореме 2 [2], числа $r+1$ и $r-1$ — числа свободны от квадратов. Теорема доказана полностью.

Замечание. В работе [10] для каждого натурального n найдена верхняя граница производной длины фактор-группы $G/\Phi(G)$ для разрешимой группы G, порядок которой не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел. В частности, при $n = 2$ из утв. 1 следствия 1.5 [10] вытекает, что $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

В работе [11] найдены инварианты разрешимой группы, максимальные подгруппы которой имеют индексы свободные от кубов. В частности, для такой группы установлено, что $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

По сравнению с этими результатами, оценка производной длины, полученная в теореме настоящей статьи, более точная и её улучшить нельзя.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф 06МС-017).

Abstract. The paper considers finite groups Sylow subgroups of which are either cyclic or of p^2-order.

Литература

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.

2. Dietrich, H. On the groups of cube-free order/ H. Dietrich, B. Eick // J. Algebra. — 2005. — V. 292. — P. 122–137.

3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — М.: Наука, 1978.

4. Schimd, P. Every saturated formation is a local formation / P. Schimd // J. Algebra. — 1978. — V. 51. — P. 144–148.

5. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.

6. Dixon, J.D. The structure of linear groups / J.D. Dixon // London, Printed in Great Britain. 1971.

7. Монахов, В.С. О произведении групп с циклическими подгруппами индекса 2 / В.С. Монахов // Весцi Акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 1996. — № 3. — С. 21–24.

8. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein — New York, 1968. — 527 p.

9. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д.Горенстейн — М.: Мир, 1985. — 352 с.

10. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43. — № 4. — С. 411–424.

11. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский матем. журн. — 2002. — Т. 54. — № 7. — С. 940–950.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.02.08