Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

$\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}$-критические формации

В. Г. Сафонов

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Мы придерживаемся терминологии принятой в [1, 2].

В теории насыщенных формаций, при изучении внутреннего строения формаций, их классификации, важную роль играют так называемые минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации [3] (или $\mathfrak{H}_l$-критические формации [4]). Напомним, что насыщенная формация $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, называется минимальной насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией, если все собственные насыщенные подформации $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Задача изучения формаций такого рода впервые была поставлена Л.А.Шеметковым на VI симпозиуме по теории групп [3]. В классе насыщенных формаций ее решение получено А.Н.Скибой в работе [5], где дано описание минимальных насыщенных не $\mathfrak{H}$-формации для любой формации $\mathfrak{H}$ классического типа (формация называется формацией классического типа, если она имеет такой локальный экран, все неабелевы значения которого насыщенны).

Общие подходы к изучению минимальных τ-замкнутых тотально насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, а также описание разрешимых минимальных тотально насыщенных не $\mathfrak{N}^m$-формаций изложены в [2] ($\mathfrak{N}^m$ — формация всех разрешимых групп нильпотентной длины $\leq m$). Позднее, автором [6–9] изучались минимальные τ-замкнутые тотально насыщенные не $\mathfrak{H}$-формаций для некоторых конкретных классов групп $\mathfrak{H}$.

В настоящей работе получена общая теорема, дающая описание $\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}$-критических формаций для любой τ-замкнутой тотально насыщенной формации $\mathfrak{H}$.

Напомним, что всякую формацию групп называют *0-кратно насыщенной.* При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно насыщенной*, если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого — $(n-1)$-кратно насыщенные формации. Формацию n-кратно насыщенную для любого целого неотрицательного n называют *тотально насыщенной.*

Подгрупповым функтором [2] называют отображение τ сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что: 1) $G \in \tau(G)$; 2) для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ и любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Тотально насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют *τ-замкнутой,* если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$. τ-Замкнутую тотально насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют *минимальной τ-замкнутой тотально насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией* (или, иначе, *$\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}$-критической*), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные τ-замкнутые тотально насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая формация. Группа G называется *τ-минимальной не $\mathfrak{H}$-группой,* если $G \notin \mathfrak{H}$, но $H \in \mathfrak{H}$ для любой собственной подгруппы H из $\tau(G)$.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{M}$ через $l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}\mathfrak{M}$ обозначают *τ-замкнутую тотально насыщенную формацию, порожденную классом групп* $\mathfrak{M}$, т.е. пересечение всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M} = \{G\}$, то $l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$ называют *однопорожденной* τ-замкнутой тотально насыщенной формацией. Для любых τ-замкнутых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\infty} \mathfrak{H} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество всех τ-

замкнутых тотально насыщенных формаций l_∞^τ с операциями $\vee_\infty^\tau$ и $\cap$ образует полную решетку. Формации из l_∞^τ называют *l_∞^τ-формациями.* Экран, все непустые значения которого l_∞^τ-формации, называют *l_∞^τ-значным.* Если $\mathfrak{F}$ — l_∞^τ-формация, то через $\mathfrak{F}_\infty^\tau$ обозначают её *минимальный l_∞^τ-значный локальный экран.*

Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \dots p_n}$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1} = (A/F_{p_1}(A) | A \in \mathfrak{X})$; 2) $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \dots p_n} = (A/F_{p_n}(A) | A \in \mathfrak{X}^{p_1 p_2 \dots p_{n-1}})$.

Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ называют *подходящей* для $\mathfrak{X}$, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ число $p_i \in \pi(\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \dots p_{i-1}})$. Множество всех подходящих для $\mathfrak{X}$ последовательностей обозначают через $\mathrm{P}(\mathfrak{X})$. Символом $\mathrm{P}^n(\mathfrak{X})$ обозначают совокупность всех таких последовательностей $p_1, p_2, \dots, p_n$ из $\mathrm{P}(\mathfrak{X})$, у которых $p_i \neq p_{i+1}$ при всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ — некоторая подходящая для $\mathfrak{F}$ последовательность. Тогда l_∞^τ-значный локальный экран $\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 p_2 \dots p_n$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 = (\mathfrak{F}_\infty(p_1))_\infty^\tau$;

2) $\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 \dots p_n = (\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1 \dots p_{n-1}(p_n))_\infty^\tau$.

Сформулируем в виде следующих лемм некоторые известные результаты теории формаций, используемые в работе.

Лемма 1 [2, с. 33]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда если f — минимальный l_∞^τ-значный экран формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = \mathfrak{X}_\infty^\tau(p) = \mathfrak{F}_\infty^\tau(p)$ при всех простых числах p;

3) если h — произвольный l_∞^τ-значный экран формации $\mathfrak{F}$, то при любом $p \in \pi(\mathfrak{X})$ имеет место

$$f(p) = l_\infty^\tau \mathrm{form}(A | A \in h(p) \bigcap \mathfrak{F},\ O_p(A) = 1).$$

Частным случаем теоремы 2.5.2 [2, с.94] является

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутые тотально насыщенные формации, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, H — канонический экран формации $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_\infty^\tau$-критической формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form} G$, где G — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $p \in \pi(P)$ формация $\mathfrak{F}_\infty^\tau(p)$ $(H(p))_\infty^\tau$-критична.*

Лемма 3 [2, с. 32]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация. Тогда в том и только в том случае формация $\mathfrak{F}$ тотально насыщена, когда для любого $p \in \mathbb{P}$ имеет место $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_\infty^\tau(p) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Лемма 4 [1, с. 79]. *Локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f, причем f удовлетворяет условию $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого числа p.*

Лемма 5 [9]. *Пусть G — монолитическая группа, $R = \mathrm{Soc(G)}$ — неабелева группа. Тогда $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form} G$ имеет единственную максимальную l_∞^τ-подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty^\tau \mathrm{form}(\{G/R\} \bigcup \mathfrak{X})$,* где *$\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы G. В частности, $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.*

Лемма 6 [1, с.168]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{H}$ локальна и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G монолитична, ее монолит совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$ и если $G^{\mathfrak{H}}$ – p-группа, то $G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = F_p(G)$.*

Лемма 7 [1, с. 171]. *Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G) = 1$ (p — некоторое простое число), то существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль, где F_p — поле из p элементов.*

Лемма 8 [2, с. 29]. *Если $\mathfrak{F} = LF(f)$ и $G/O_p(G) \in f(p) \bigcap \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 15 работы [10].

Лемма 9. *Пусть G — такая монолитическая группа, что $P = \mathrm{Soc(G)}$ — абелева p-группа. Тогда если $P \not\subseteq \Phi(G)$, то $l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(G/P)$.*

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая тотально насыщенная формация, H — канонический спутник формации $\mathfrak{H}$, p — простое число. Тогда если $l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}K$ — $(H(p))^{\tau}_{\infty}$-критическая формация, где K — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus H(p)$ и $G = [P]K$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-группа, то G — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа и $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$ — $\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}$-критическая формация.*

Доказательство. Пусть G группа из условия леммы. Допустим, что группа G не является τ-минимальной не $\mathfrak{H}$-группой и пусть H — такая собственная τ-подгруппа группы G, что $H \notin \mathfrak{H}$.

Допустим, что H — максимальная подгруппа группы G. Тогда если $P \not\subseteq H$, то $HP = G$ и $P \cap H = 1$. Значит, $H \simeq H/H \cap P \simeq HP/P = G/P \simeq K \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $P \subseteq H$. Поэтому $PH = H$. Поскольку $H/P = HP/P \in \tau(G/P) \setminus \{G/P\}$ и $H(p)$ — τ-замкнутая формация, то $H/P \in H(p)$. Значит, $H^{H(p)} \subseteq P \in \mathfrak{N}_p$. Поскольку $H(p) = \mathfrak{N}_p H(p)$, то $H \in H(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие.

Таким образом, H не является максимальной подгруппой группы G. Заметим также, поскольку $HP/P \in \tau(G/P)$, то если $HP/P \in \tau(G/P) \setminus \{G/P\}$ имеем $H/H \cap P \simeq HP/P \in H(p)$. Значит, $H^{H(p)} \subseteq P \in \mathfrak{N}_p$. Последнее влечет $H \in H(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому $HP/P = GP/P$. Следовательно, $HP = G$.

Пусть M — такая максимальная подгруппа группы G, что $H \subset M$. Тогда $MP = G$ и $P \not\subseteq M$. В силу максимальности подгруппы M имеем $M \cap P = 1$. Откуда

$$M = M \cap G = M \cap HP = H(M \cap P) = H.$$

Противоречие.

Таким образом, $H \in \mathfrak{H}$ и G — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа.

Кроме того, поскольку $G/F_p() = G/P \simeq K \in \mathfrak{H} \setminus H(p)$, то $G \notin \mathfrak{H}$ и $P = G^{\mathfrak{H}}$. Пусть $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$. Тогда по лемме 1 имеем $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}(p) = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}K$. Следовательно, $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}(p)$ — $(H(p))^{\tau}_{\infty}$-критическая формация. Применяя теперь лемму 2 получим, что $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}$-критическая формация. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть G — монолитическая группа, $P = \mathrm{Soc(G)}$ — неабелева группа. Тогда $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G = \mathfrak{S}_{\pi(P)} l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$.*

Доказательство. Пусть G группа из условия леммы. $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$. Обозначим через $\mathfrak{X}$ формацию $\mathfrak{S}_{\pi(P)}\mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда A — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с монолитом $R = A^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $A \in \mathfrak{S}_{\pi(R)}\mathfrak{F}$, то R — абелева r-группа для некоторого простого числа r из $\pi(P)$. Значит, $A \in \mathfrak{N}_r\mathfrak{F}$.

В силу леммы 1 $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}(r) = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(G/F_r(G) = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$. По лемме 3 имеем

$$\mathfrak{N}_r\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}(r) = \mathfrak{N}_r l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G \subseteq \mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G.$$

Следовательно, $\mathfrak{N}_r\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ и $A \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G = \mathfrak{S}_{\pi(P)} l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутые тотально насыщенные формации, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form} G$, где G — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P_1 = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P_1$ — группа простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

2) P_1 — неабелева группа и $\mathfrak{S}_{\pi(P_1)} l_\infty^\tau \mathrm{form}(\{G/P_1\} \cup \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы G;

3) $G = [P_1]([P_2] \ldots ([P_m]N) \ldots)$, где P_i — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в $[P_i]([P_{i+1}] \ldots ([P_m]N) \ldots)$ при всех $i = 1, \ldots, m$, а N либо группа простого порядка $q \notin \pi(\mathfrak{N}_{p_m} \mathfrak{H}_\infty^\tau p_1 \ldots p_{m-1}(p_m))$, либо такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_{p_m} \mathfrak{H}_\infty^\tau p_1 \ldots p_{m-1}(p_m)$-группа с неабелевым монолитом R, что $p_m \notin \pi(R)$, R совпадает с $\mathfrak{N}_{p_m} \mathfrak{H}_\infty^\tau p_1 \ldots p_{m-1}(p_m)$-корадикалом группы N и $\mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty^\tau \mathrm{form}(\{N/R\} \cup \mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{N}_{p_m} \mathfrak{H}_\infty^\tau p_1 \ldots p_{m-1}(p_m)$, где $\mathfrak{L}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы N.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация. Тогда в силу леммы 2 $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form} F_1$, где F_1 — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P_1 = F_1^{\mathfrak{H}}$, что для всех $p \in \pi(P_1)$ формация $\mathfrak{F}_\infty^\tau(p)$ $(H(p))_\infty^\tau$-критична.

Ввиду леммы 4 $H(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}_\infty^\tau(p)$ для любого простого числа p.

Пусть $p_1 \in \pi(P_1)$. Предположим, что $p_1 \notin \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $H(p_1) = \varnothing$. Поэтому $\mathfrak{F}_\infty^\tau(p_1) = (1)$. Ввиду леммы 1 $\mathfrak{F}_\infty^\tau(p_1) = l_\infty^\tau \mathrm{form}(F_1/F_{p_1}(F_1))$. Значит, $F_{p_1}(F_1) = F_1$. Поскольку группа F_1 монолитична, а также $p_1 \in \pi(P_1)$, заключаем, что $F_1 = P_1$ — группа простого порядка p_1. Таким образом, группа F_1 удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь $p_1 \in \pi(\mathfrak{H})$. Предположим, что P_1 — неабелева группа. Тогда ввиду леммы 5 формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую тотально насыщенную подформацию $\mathfrak{S}_{\pi(P_1)} l_\infty^\tau \mathrm{form}(\{F_1/P_1\} \cup \mathfrak{X}_1)$, где $\mathfrak{X}_1$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы F_1. Поскольку по условию $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация, то $\mathfrak{S}_{\pi(P_1)} l_\infty^\tau \mathrm{form}(\{F_1/P_1\} \cup \mathfrak{X}_1) \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, имеет место условие 2) теоремы.

Допустим теперь, что P_1 — абелева p_1-группа. Так как $\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, то $P_1 \not\subseteq \Phi(F_1)$. Ввиду леммы 6 имеем $P_1 = C_{F_1}(P_1) = F_{p_1}(F_1)$.

По лемме 1 $\mathfrak{F}_\infty^\tau(p_1) = l_\infty^\tau \mathrm{form}(F_1/F_{p_1}(F_1))$. Поскольку $\mathfrak{F}_\infty^\tau(p_1)$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $H(p_1)$-формация, то в силу леммы 2 $\mathfrak{F}_\infty^\tau(p_1) = l_\infty^\tau \mathrm{form}(F_1/F_{p_1}(F_1)) = l_\infty^\tau \mathrm{form} G_1$, где G_1 — τ-минимальная монолитическая не $H(p_1)$-группа с монолитом $P_2 = G_1^{H(p_1)}$. Ввиду того, что $H(p_1) = \mathfrak{N}_{p_1} \mathfrak{H}_\infty^\tau(p_1)$ заключаем, что P_2 не является p_1-группой.

Так как G_1 — монолитическая группа и $O_{p_1}(G_1) = 1$, то по лемме 7 существует точный неприводимый $F_{p_1}[G_1]$-модуль W, где F_{p_1} поле из p_1 элементов. Пусть $F_2 = [W]G_1$. Тогда $O_{p_1}(F_2) = F_{p_1}(F_2) = W$. Поскольку $F_2/O_{p_1}(F_2) \simeq G_1 \in \mathfrak{F}_\infty^\tau(p_1)$, то в силу леммы 8 группа F_2 принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Поэтому $l_\infty^\tau \mathrm{form} F_2 \subseteq \mathfrak{F}$. Так как при этом, $F_2/F_{p_1}(F_2) \simeq G_1 \notin \mathfrak{N}_{p_1} \mathfrak{H}_\infty^\tau(p_1)$, то $F_2 \notin \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \mathrm{form} F_2$.

Покажем, что группа F_2 удовлетворяет условию 3) теоремы. В силу леммы 10 группа F_2 является τ-минимальной не $\mathfrak{H}$-группой.

Пусть $p_2 \in \pi(P_2)$. Предположим, что $p_2 \notin \pi(H(p_1))$. Тогда поскольку $H(p_1) = \mathfrak{N}_{p_1} \mathfrak{H}_\infty^\tau(p_1)$, то $p_2 \neq p_1$, $p_2 \notin \pi(\mathfrak{H}_\infty^\tau(p_1))$ и $\mathfrak{H}_\infty^\tau p_1(p_2) = \varnothing$. Но $\mathfrak{F}_\infty^\tau(p_1)$ — $(\mathfrak{N}_{p_1} \mathfrak{H}_\infty^\tau(p_1))_\infty^\tau$-критическая формация. Поэтому $\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1(p_2) = (1)$. Ввиду леммы 1 $\mathfrak{F}_\infty^\tau p_1(p_2) = l_\infty^\tau \mathrm{form}(G_1/F_{p_2}(G_1))$. Значит, $F_{p_2}(G_1) = G_1$. Поскольку группа G_1 монолитична, а также $p_2 \in \pi(P_2)$, то $G_1 = P_2$ — группа простого порядка p_2.

Таким образом, группа F_2 удовлетворяет условию 3) теоремы.

Пусть теперь $p_2 \in \pi(H(p))$. Предположим, что P_2 — неабелева группа. Тогда ввиду леммы 5 формация $l^\tau_\infty \mathrm{form} G_2$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую тотально насыщенную подформацию $\mathfrak{S}_{\pi(P_2)} l^\tau_\infty \mathrm{form}(\{G_1/P_2\} \cup \mathfrak{X}_2)$, где $\mathfrak{X}_2$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы G_1. Поскольку $l^\tau_\infty \mathrm{form} G_1$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{H}^\tau_\infty(p_1)$-формация, то $\mathfrak{S}_{\pi(P_2)} l^\tau_\infty \mathrm{form}(\{G_1/P_2\} \cup \mathfrak{X}_2) \subseteq \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{H}^\tau_\infty(p_1)$. Заметим также, что $p_1 \notin \pi(P_2)$, поскольку в противном случае по лемме 11 имеем $l^\tau_\infty \mathrm{form} G_2 = \mathfrak{S}_{\pi(P_2)} l^\tau_\infty \mathrm{form} G_2$. Так как по лемме 9 $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1} l^\tau_\infty \mathrm{form} G_2$, то $\mathfrak{F} \subseteq l^\tau_\infty \mathrm{form} G_2$. Но $l^\tau_\infty \mathrm{form} G_2 \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $p_1 \notin \pi(P_2)$ и мы снова заключаем, что группа F_2 удовлетворяет условию 3) теоремы.

Допустим теперь, что P_2 — абелева p_2-группа. Так как $H(p_1) = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{H}^\tau_\infty(p_1)$ — насыщенная формация, то $P_2 \not\subseteq \Phi(G_1)$. Ясно, также что $p_1 \neq p_2$ и $P_2 = C_{G_1}(P_2) = F_{p_2}(G_1)$. Поскольку $\mathfrak{F}^\tau_\infty(p_1)$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $H(p_1)$-формация, то в силу лемм 1 и 2

$$\mathfrak{F}^\tau_\infty p_1(p_2) = l^\tau_\infty \mathrm{form}(G_1/F_{p_2}(G_1)) = l^\tau_\infty \mathrm{form} G_2,$$

где G_2 — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1(p_2)$-группа с монолитом $P_3 = G_2^{\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1(p_2)}$, что для всех $p \in \pi(P_3)$ формация $\mathfrak{F}^\tau_\infty p_1 p_2(p)$ является $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2(p))^\tau_\infty$-критической.

Поскольку G_2 — монолитическая группа и $O_{p_2}(G_2) = 1$, то в силу леммы 7 существует точный неприводимый $F_{p_2}[G_2]$-модуль V, где F_{p_2} поле из p_2 элементов. Пусть $M = [V]G_2$. Ввиду леммы 10 M — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{H}^\tau_\infty(p_1)^\tau_\infty$-группа $\mathfrak{F}^\tau_\infty(p_1) = l^\tau_\infty \mathrm{form} M$ и является $(\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{H}^\tau_\infty(p_1))^\tau_\infty$-критической формацией. Так как $p_1 \neq p_2$, то для группы M существует точный неприводимый $F_{p_1}[M]$-модуль D. Пусть $F_3 = [D]M$. Тогда применяя лемму 10 получим, что F_3 — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа и $\mathfrak{F} = l^\tau_\infty \mathrm{form} F_3$.

Пусть $p_3 \in \pi(P_3)$. Проводя для группы G_2 аналогичные рассуждения как и для группы G_1 получим, что в случае когда $p_3 \notin \pi(\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2(p_3))$, а также если $p_3 \in \pi(\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2(p_3))$ и P_3 — неабелева группа, то группа F_3 удовлетворяет условию 3) теоремы. Если же P_3 — абелева p_3-группа и $p_3 \in \pi(\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2(p_3))$, то $p_3 \neq p_2$ и $P_3 = C_{G_2}(P_3) = F_{p_3}(G_2)$.

Поскольку $\mathfrak{F}^\tau_\infty p_1 p_2(p_3)$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1(p_2)$-формация, то в силу лемм 1 и 2

$$\mathfrak{F}^\tau_\infty p_1 p_2(p_3) = l^\tau_\infty \mathrm{form}(G_2/F_{p_3}(G_2)) = l^\tau_\infty \mathrm{form} G_3,$$

где G_3 — такая τ-минимальная монолитическая группа с монолитом $P_4 = G_3^{\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1(p_2)}$, что для всех $p \in \pi(P_3)$ формация $\mathfrak{F}^\tau_\infty p_1 p_2 p_3(p)$ является $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2 p_3(p))^\tau_\infty$-критической.

Путь $p_4 \in \pi(P_4)$. Рассуждая для группы G_3 также как и для группы G_2 мы построим группу F_4 порождающую формацию $\mathfrak{F}$ и в случае если $p_4 \notin \pi(\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2(p_3))$, а также если $p_3 \in \pi(\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2(p_3))$ и P_3 — неабелева группа, удовлетворяющую условию 3) теоремы, и т.д. Так как формация $\mathfrak{F}$ порождается конечной группой, то продолжая этот процесс на некотором шаге m мы получим, что

$$\mathfrak{F}^\tau_\infty p_1 p_2 \ldots p_{m-1}(p_m) = l^\tau_\infty \mathrm{form} N,$$

где N — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2 \ldots p_{m-1}(p_m)$-группа с монолитом R, что для $q \in \pi(R)$, либо $q \notin \pi(\mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2 \ldots p_{m-1}(p_m))$ и N — группа простого порядка q, либо $q \in \pi(\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2 \ldots p_{m-1}(p_m))$ и $p_m \notin \pi(R)$, R — неабелева группа совпадающая с $\mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}^\tau_\infty p_1 p_2 \ldots p_{m-1}(p_m)$-корадикалом группы N.

Поскольку $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}p_1p_2\dots p_{m-1}(p_m)$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1p_2\dots p_{m-1}(p_m))$-формация, то применяя леммы 10 и 2 построим монолитическую τ-минимальную не $\mathfrak{H}$-группу $F_m = [P_1]([P_2]\dots([P_m]N)\dots)$, такую, что P_i — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в $[P_i]([P_{i+1}]\dots([P_m]N)\dots)$ при всех $i = 1,\dots,m$, при этом $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}F$ и группа F_m удовлетворяет условию 3) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$ — формация из условия теоремы. Предположим, что группа G удовлетворяет условию 1). Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Так как (1) — единственная τ-замкнутая тотально насыщенная подформация $\mathfrak{F}$ и $(1) \subseteq \mathfrak{H} \neq \emptyset$, то $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}$-критическая формация.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию 2) теоремы. Тогда в силу леммы 5 формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую тотально насыщенную подформацию $\mathfrak{S}_{\pi(P_1)}l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(\{G/P_1\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы G. Так как по условию $\mathfrak{S}_{\pi(P_1)}l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(\{G/P_1\} \cup \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация.

Рассмотрим теперь случай когда группа G удовлетворяет условию 3) теоремы и пусть N — группа простого порядка $q \notin \pi(\mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}(p_m))$. Тогда $\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}p_m(q) = \emptyset$. Так как при этом $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}p_m(q) = (1)$ и $\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}p_m$ — минимальный l^{τ}_{∞}-значный спутник формации $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}(p_m)$, то ввиду леммы 2 $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}(p_m) = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}N$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}(p_m))$-формация. Применяя теперь леммы 2 и 7 получим, что $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}([P_1]([P_2]\dots([P_m]N)\dots))$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация.

Пусть теперь R — неабелева группа. Тогда по лемме 5 формация $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}(p_m) = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}N$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую тотально насыщенную подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)}l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(\{N/R\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы N. Так как по условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}(p_m)$, то $\mathfrak{F}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}(p_m) = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}N$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1\dots p_{m-1}(p_m)$-формация. Привлекая теперь леммы 2 и 7 снова заключаем, что $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}([P_1]([P_2]\dots([P_m]N)\dots))$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация. Теорема доказана.

Используя лемму 9 приведем другую формулировку теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутые тотально насыщенные формации, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$, *где G — такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой $P = G^{\mathfrak{H}}$, что справедливо включение $\mathfrak{S}_{\pi(P)}l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(\{G/P\} \bigcup \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы G;*

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\dots\mathfrak{N}_{p_n}$, где $p_1, p_2, \dots, p_{n-1} \in P^{n-1}(\mathfrak{H})$ и $p_n \notin \pi(\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1p_2\dots p_{n-1}(p_n))$;

3) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\dots\mathfrak{N}_{p_n}l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}G$, *где $p_1, p_2, \dots, p_n \in P^n(\mathfrak{H})$, а G — такая монолитическая группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой P, что P совпадает с $\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1p_2\dots p_{n-1}(p_n)$-корадикалом группы G, $p_n \notin \pi(P)$ и $\mathfrak{S}_{\pi(R)}l^{\tau}_{\infty}\mathrm{form}(H/R) \subseteq \mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}p_1p_2\dots p_{n-1}(p_n)$.*

Доказанная теорема 1 имеет многочисленные следствия. В частности, имеют место

Следствие 1 [2, с. 94]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально локальная не $\mathfrak{N}^m$-формация, когда*

$\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, *где* $G = [P_1]([P_2] \dots ([P_m]N) \dots)$ *— минимальная не* $\mathfrak{N}^m$*-группа,* P_i *— самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в* $[P_i]([P_{i+1}] \dots ([P_m]N) \dots)$ *при всех* $i = 1, \dots, m$ *и* N *— группа простого порядка.*

Следствие 2 [2, с. 94]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— разрешимая формация. Тогда в том и только в том случае* $\mathfrak{F}$ *— минимальная тотально локальная не* $\mathfrak{N}^m$*-формация, когда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2} \dots \mathfrak{N}_{p_{m+1}}$ *для некоторой последовательности* $p_1, p_2, \dots, p_{m+1}$ *из* $\mathrm{P}^{m+1}(\mathfrak{F})$.

Следствие 3 [9]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* l^τ_∞*-формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *— минимальная* τ*-замкнутая тотально насыщенная неразрешимая формация, когда* $\mathfrak{F} = l^\tau_\infty \mathrm{form} G$, *где* G *— такая монолитическая* τ*-минимальная неразрешимая группа с неабелевым монолитом* P, *что группа* G/P *разрешима.*

Следствие 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *—* τ*-замкнутые тотально насыщенные формации, причем формация* $\mathfrak{F}$ *разрешима и* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$*. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathfrak{H}^\tau_\infty$*-критическая формация, когда* $\mathfrak{F}$ *— минимальная тотально насыщенная не* $\mathfrak{N}^m$*-формация для некоторого подходящего натурального* m.

Приведем несколько следствий теоремы 1 для некоторых конкретных подгрупповых функторов τ.

Пусть τ — единичный подгрупповой функтор, т.е. $\tau(G) = S(G)$ — совокупность всех подгрупп группы G. Тогда имеет место

Следствие 5. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *— минимальная наследственная тотально насыщенная неразрешимая формация, когда* $\mathfrak{F} = l^S_\infty \mathrm{form} G$, *где* G *— простая неабелева минимальная неразрешимая группа.*

Пусть $\tau(G) = S_n(G)$ — совокупность всех нормальных подгрупп группы G.

Следствие 6. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *— минимальная нормально наследственная тотально насыщенная неразрешимая формация, когда* $\mathfrak{F} = l^{S_n}_\infty \mathrm{form} G$, *где* G *— простая неабелева группа.*

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, т.е. $\tau(G) = \{G\}$ из теоремы 1 вытекают

Следствие 7 [6]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *— минимальная тотально насыщенная неразрешимая формация, когда* $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, *где* G *— такая монолитическая группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой* R, *что группа* G/R *разрешима.*

Следствие 8 [7]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{X}$ *— тотально насыщенные формации, причем* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$*. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathfrak{X}_\infty$*-критическая формация, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$, *где* $p \notin \pi(\mathfrak{X})$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ *для некоторых различных простых чисел* p *и* q *из* $\pi(\mathfrak{X})$.

Следствие 9. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— тотально насыщенные формации,* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$*. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *— минимальная тотально насыщенная не* $\mathfrak{H}$*-формация, когда* $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, *где* G *— такая монолитическая группа с монолитом* $P_1 = G^{\mathfrak{H}}$, *что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P_1$ *— группа простого порядка* $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

2) P_1 *— неабелева группа и* $\mathfrak{S}_{\pi(P_1)} l_\infty \mathrm{form}(G/P_1) \subseteq \mathfrak{H}$;

3) $G = [P_1]([P_2] \dots ([P_m]N) \dots)$, *где* P_i *— самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в* $[P_i]([P_{i+1}] \dots ([P_m]N) \dots)$ *при всех* $i = 1, \dots, m$, *а* N *либо группа простого порядка* $q \notin \pi(\mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}_\infty p_1 \dots p_{m-1}(p_m))$, *либо такая монолитическая группа с неабелевым монолитом* R, *что* $p_m \notin \pi(R)$, R *совпадает с* $\mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}_\infty p_1 \dots p_{m-1}(p_m)$*-корадикалом группы* N *и* $\mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty \mathrm{form}(N/R) \subseteq \mathfrak{N}_{p_m}\mathfrak{H}_\infty p_1 \dots p_{m-1}(p_m)$.

Abstract. The article deals with finite groups. Every formation is 0-multiply saturated. A formation $\mathfrak{F}$ is called n-multiply saturated ($n \geq 1$) if $\mathfrak{F} = LF(f)$ where all non-empty values of f are $(n-1)$-multiply saturated formations. A formation $\mathfrak{F}$ is called totally saturated if it is n-multiply saturated for any natural number n.

Let for any group G, $\tau(G)$ be a set of subgroups of G such that $G \in \tau(G)$. Then we say following A.N.Skiba that τ is a subgroup functor if for every epimorphism $\varphi : A \to B$ and any groups $H \in \tau(A)$ and $T \in \tau(B)$ we have $H^{\varphi} \in \tau(B)$ and $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

A class of groups $\mathfrak{F}$ is called τ-closed, if $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ for all $G \in \mathfrak{F}$.

A τ-closed totally saturated formation $\mathfrak{F}$ is called a minimal τ-closed totally saturated non-$\mathfrak{H}$-formation (or an $\mathfrak{H}^{\tau}_{\infty}$-critical formation) if $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ but all proper τ-closed totally saturated subformations of $\mathfrak{F}$ are contained in $\mathfrak{H}$.

The paper presents the description of minimal τ-closed totally saturated non-$\mathfrak{H}$-formations for every τ-closed totally saturated formation $\mathfrak{H}$.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба // М.: Наука, 1989.

2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба // Мн.: Беларуская навука, 1997.

3. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л. А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзн. симпозиум по теории групп. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 37–50.

4. Скиба, А.Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.–мат. наук., 1980. – № 4. – С. 27–33.

5. Скиба, А.Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин–т математики АН Украины, 1993. – С. 258–268.

6. Сафонов, В.Г. О тотально насыщенных формациях конечной длины / В. Г. Сафонов // Известия Гомельского госуниверситета, 2004. — № 6. — С. 150–155.

7. Сафонов, В.Г. О двух задачах теории тотально насыщенных формаций / В. Г. Сафонов // Докл. НАН Беларуси, 2005. – Т. 49, № 5, – С. 16–20.

8. Сафонов, В.Г. О приводимых тотально насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В. Г. Сафонов // Известия Гомельского госуниверситета, 2005. № 4 (31). — С. 157–162.

9. Сафонов, В.Г. Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Сибирский матем. журнал, 2007 – Т. 48, № 1. – С. 185–191.

10. Сафонов, В.Г. Тотально насыщенные формации с метанильпотентным l_{∞}-дефектом ≤ 2 / В. Г. Сафонов // Известия Гомельского госуниверситета, 2006. № 4. – С. 166–173.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.06.07