Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

Максимальные подгруппы и π-сверхразрешимость конечной группы

А. В. Шныпарков

Рассматриваются только конечные группы. Исследование строения разрешимой группы в зависимости от значений показателей степеней примарных индексов максимальных подгрупп произведено в работах [1-3]. Б. Хупперт [1] установил, что конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп простые числа. Ф. Холл ([2], теорема 10.5.7) доказал, что если индексы максимальных подгрупп — простые числа или квадраты простых чисел, то группа разрешима. Инварианты разрешимой группы в зависимости от произвольных значений показателей степеней примарных индексов максимальных подгрупп получены В. С. Монаховым [3].

В настоящей заметке развивается тематика подобных исследований. Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — группа нечетного порядка, π — некоторое подмножество множества $\pi(G)$. Если индекс каждой подгруппы из $\mathcal{M}_\pi(G)$ — простое число или квадрат простого числа, то $r_p(G) \leq 2$ для всех простых $p \in \pi$.*

Теорема 2. *Пусть G — π-разрешимая группа. Группа G π-сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждой подгруппы M из $\mathcal{M}_\pi(G)$ пересечение $F_\pi(G) \cap M$ — максимальная подгруппа группы $F_\pi(G)$.*

Напомним необходимые обозначения и определения. Символом π будем обозначать некоторое множество простых чисел, а π' — дополнение к π во множестве всех простых чисел. Число, делящееся только на простые числа из множества π, называется π-числом. Множество всех простых делителей порядка группы G обозначается $\pi(G)$. Подгруппа H группы G называется π-группой, если $\pi(H) \subseteq \pi$. Если же $\pi(H) \subseteq \pi'$, то будем говорить, что H — π'-группа. В дальнейшем будем считать, что π — некоторое подмножество $\pi(G)$ основной группы G.

Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$, а $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. Запись $G = [A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Класс всех нильпотентных π-групп обозначается через $\mathfrak{N}_\pi$, а $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — класс всех π'-групп.

Через $F_\pi(G)$ обозначается наибольшая нормальная π-нильпотентная подгруппа группы G с нильпотентной π-холловой подгруппой. Таким образом $F_\pi(G)/O_{\pi'}(G) = F(G/O_{\pi'}(G))$ и $F_\pi(G) = [O_{\pi'}(G)]A$, где A — нильпотентная π-холлова подгруппа из $F_\pi(G)$. Множество всех максимальных подгрупп группы G, у которых индекс является π-числом и которые не содержат $F_\pi(G)$, обозначим через $\mathcal{M}_\pi(G)$.

Ряд

$$E \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G \qquad (1)$$

неединичной группы G называется главным рядом, если G_{i-1} является максимальной нормальной подгруппой группы G, содержащейся в G_i для всех $i = 2, 3, \ldots, n$. Факторгруппы G_i/G_{i-1} при этом называются главными факторами ряда (1).

Число r называется p-рангом ряда (1), если p^r является наибольшей степенью числа p, встречающейся в качестве порядков факторов ряда (1). Если среди порядков факторов ряда (1) нет ни одного, равного степени p, то p-ранг ряда (1) считается равным нулю.

Если (1) — главный ряд неединичной группы G, то его p-ранг называют главным p-рангом группы G и обозначают через $r_p(G)$. В силу теоремы Жордана-Гельдера любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому значение главного p-ранга определяется однозначно.

Главный ранг неединичной группы G определяется равенством $r(G) = \max\{r_p(G) \mid p \in \pi(G)\}$. Для единичной группы E полагают $r_p(E) = r(E) = 0$,

Пусть (1) — главный ряд группы G и $|G_i/G_{i-1}| = p^{\alpha_i}, i \in I \subseteq \{2, 3, \dots, n\}$. Арифметическим p-рангом неединичной группы G называется наименьшее общее кратное всех α_i, $i \in I$, и обозначается $\overline{r}_p(G)$. Если $G = 1$, то считают, что $\overline{r}_p(G) = 0$.

Группа G называется π-разрешимой [5], если все ее главные факторы являются либо элементарными абелевыми p-группами для $p \in \pi$, либо π'-группами. π-разрешимая группа с π-факторами простых порядков называется π-сверхразрешимой.

Для доказательства приведенных выше теорем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. ([6], теорема 4.23) *Если H — нильпотентная нормальная подгруппа группы G и $H \cap \Phi(G) = 1$, то H дополняема в группе G.*

Лемма 2. ([7], лемма 3.3) *Пусть G — неприводимая подгруппа $GL(2, p)$ и $|G|$ — нечетное число. Тогда G — циклическая группа порядка делящего $(p^2 - 1)$.*

Лемма 3. ([6], теорема 4.24) *В любой группе G фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп фактор-группы $F(G)/\Phi(G)$.*

Лемма 4. ([4], теорема VI.8.4) *Если G — разрешимая группа и $(\overline{r}_p(G/\Phi(G), |G|) = 1$, то $\overline{r}_p(G/\Phi(G) = \overline{r}_p(G)$.*

Лемма 5. ([4], теорема VI.9.3) *Если G — p-разрешимая группа и индекс каждой максимальной в G подгруппы либо не делится на p, либо равен p, то группа G p-сверхразрешима.*

Лемма 6. *Пусть G — группа, $\pi \subseteq \pi(G)$, $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$. Если H/K — G-главный фактор группы G и $H \subseteq F(G)$, то существует подгруппа M из $\mathcal{M}_\pi(G)$ такая что $|G : M| = |H/K|$.*

Доказательство. По лемме 1 подгруппа K дополняема в группе G. Поэтому существует подгруппа A группы G такая, что $G = [K]A$. По тождеству Дедекинда

$$H = G \cap H = [K](H \cap A) = K \times (H \cap A),$$

поскольку $H \leq F(G)$ и $F(G)$ — абелева подгруппа. Обозначим $N = H \cap A$. Ясно, что $N \lhd A$ и N централизует K. Поэтому $N \lhd G$. Так как $H/K \simeq N$, то N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Поскольку $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная в G подгруппа M такая, что $G = [N]M$ и $|G : M| = |N| = |H/K|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя индукцию по порядку группы G, заключаем, что $O_{\pi'}(G) = 1$ и $F_\pi(G) = F(G)$. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Опять применяя индукцию по порядку группы G, получаем, что $r_p(G/\Phi(G)) \leq 2$. Значит $\overline{r}_p(G/\Phi(G)) \leq 2$. Так как $|G|$ — нечетное число, то $(\overline{r}_p(G/\Phi(G), |G|) = 1$. По лемме 4 $\overline{r}_p(G) \leq 2$, а значит и $r_p(G) \leq 2$. В силу индукции $\Phi(G) = 1$.

Используя лемму 6, получаем, что порядки G-главных π-факторов, содержащихся в подгруппе $F(G)$ — простые числа или квадраты простых чисел.

Остается показать, что порядки главных π-факторов фактор-группы $G/F(G)$ — простые числа или квадраты простых чисел. По лемме 3

$$F(G) = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n, \tag{2}$$

где N_i — абелевы минимальные нормальные π-подгруппы группы G. Так как $\Phi(G) = 1$, то для любой подгруппы N_i, где $i = 1, \ldots, n$, существует подгруппа M_i из $\mathcal{M}_\pi(G)$ такая, что

$$G = [N]M, \ |N_i| = |G : M_i|.$$

По предположению

$$|N_i| = p \ \text{ или } \ |N_i| = p^2, \ p \in \pi, \ i = 1, \ldots, n.$$

Если $|N_i|$ — простое число для некоторого $i \in 1, \ldots, n$, то фактор-группа $G/C_G(N_i)$ циклическая. Если $|N_i| = p^2$ для некоторого $i \in 1, \ldots, n$, то $G/C_G(N_i)$ — неприводимая подгруппа группы $GL(2, p)$. Так как $|G|$ — нечетное число, то по лемме 2 $G/C_G(N_i)$ — циклическая группа. Из равенства (2) следует, что

$$C_G(F(G)) = \cap_{i=1}^n C_G(N_i).$$

Так как G разрешима, то $C_G(F(G)) \leq F(G)$. А поскольку $F(G)$ абелева, то $F(G) \leq C_G(F(G))$. Поэтому $F(G) = C_G(F(G))$ и

$$G/F(G) = G/C_G(F(G)) \ \text{ изоморфна подгруппе из } \ \prod_{i=1}^n G/C_G(N_i).$$

Это означает, что $G/F(G)$ абелева. Отсюда следует, что все главные факторы фактор-группы $G/F(G)$ имеют простые порядки. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть G π-сверхразрешима и M — максимальная подгруппа группы G, индекс которой является π-числом. Тогда $|G : M|$ — простое число. Если $F_\pi(G)$ не содержится в M, то

$$F_\pi(G)M = G \ \text{ и } \ |G : M| = |F_\pi(G) : F_\pi(G) \cap M|$$

является простым числом. Поэтому $F_\pi(G) \cap M$ — максимальная подгруппа в $F_\pi(G)$.

Обратно, пусть G π-разрешима и для каждой подгруппы M из $\mathcal{M}_\pi(G)$ пересечение $F_\pi(G) \cap M$ — — максимальная подгруппа группы $F_\pi(G)$. Предположим, что $K = O_{\pi'}(G) \neq 1$. Тогда M/K — максимальная подгруппа группы G/K и $|G/K : M/K|$ — π-число. Кроме того, $(F_\pi(G) \cap M)/K$ — максимальная подгруппа в $F_\pi(G)/K$. По индукции факторгруппа G/K π-сверхразрешима. Это означает, что группа G π-сверхразрешима, противоречие. Значит

$$O_{\pi'}(G) = 1 \ \text{ и } \ F_\pi(G) = F(G).$$

Так как

$$F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G),$$

то условия теоремы 2 переносятся на фактор-группу $G/\Phi(G)$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по индукции $G/\Phi(G)$ π-сверхразрешима, поэтому согласно теореме VI.8.6 [4] группа G π-сверхразрешима. Итак,

$$\Phi(G) = 1, \ F_\pi(G) = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n$$

является прямым произведением абелевых минимальных нормальных π-подгрупп N_i группы G, $i = 1, \ldots, n$. Для каждого i существует максимальная подгруппа M_i группы G такая, что

$$M_i \cap N_i = 1 \ \text{ и } \ G = M_i[N_i].$$

Согласно тождеству Дедекинда,

$$F_\pi(G) = [N_i](F_\pi(G) \cap M_i),$$

а по условию теоремы $F_\pi(G) \cap M_i$ — максимальная подгруппа в $F_\pi(G)$. Из нильпотентности $F_\pi(G)$ следует, что индекс

$$|N_i| = |F_\pi(G) : F_\pi(G) \cap M_i| = p_i$$

есть простое число из π. Теперь фактор-группа $G/C_G(N_i)$ абелева, поэтому

$$G' \leq \cap_{i=1}^n C_G(N_i) \leq C_G(F_\pi(G)) \leq F_\pi(G).$$

Пусть теперь M — максимальная в G подгруппа и $|G : M| = p^\alpha$, $p \in \pi$. Если $F_\pi(G) \leq M$, то G/M абелева и $|G : M|$ — простое число. Если $F_\pi(G)$ не содержится в M, то

$$F_\pi(G)M = G \text{ и } |G : M| = |F_\pi(G) : F(G)_\pi \cap M_i|$$

будет простым числом. По лемме 5 группа G p-сверхразрешима для всех $p \in \pi$. Теперь G π-сверхразрешима. Теорема 2 доказана.

Следствие 2.1. ([6], теорема 4.56) *Пусть G — разрешимая группа. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M группы G либо $F(G) \leq M$, либо $F(G) \cap M$ — максимальная подгруппа группы $F(G)$.*

Доказательство. Полагая $\pi = \pi(G)$, в теореме 2 получаем требуемое утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть G — π-разрешимая группа. Группа G π-сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M группы G, индекс которой есть π-число, и любой нормальной подгруппы N группы G либо $N \leq M$, либо $N \cap M$ — максимальная подгруппа группы N.*

Доказательство. Пусть G — π-сверхрешимая группа, M — максимальная подгруппа группы G, индекс которой есть π-число, и N — нормальная подгруппа группы G. Если M не содержит N, то

$$MN = G \text{ и индекс } |G : M| = |N : N \cap M|$$

будет простым числом. Поэтому $N \cap M$ — максимальная подгруппа в N.

Обратно, пусть для каждой максимальной подгруппы M группы G, индекс которой есть π-число, и любой нормальной подгруппы N группы G либо $N \leq M$, либо $N \cap M$ — максимальная подгруппа группы N. Тогда это верно и для подгруппы $F_\pi(G)$. По теореме 2 группа G π-сверхразрешима. Следствие доказано.

При $\pi = \pi(G)$ следствие 2.2 совпадает со следствием 1 теоремы 4.56 [6].

Abstract. The paper considers finite groups with the limitation on maximal subgroups of given in-dexes.

Литература

1. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeit. — 1954. — V. 60. — P. 409–434.

2. Холл М. Теория групп / М. Холл // М.: ИЛ. — 1962.

3. Монахов, В. С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В. С. Монахов // Алгебра и логика. — 2004. — 43, № 4. — С. 411–424.

4. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert // Berlin, Heidelberg, New York. — 1967.

5. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп / С. А. Чунихин // Минск: Наука и техника. — 1964. — 158 с.

6. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа. — 2006.

7. Kohler J. Finite groups with all maximal subgroups of prime or prime square index / J. Kohler // Canadian J. Math. — 1964. — V. 16. — P. 435–442.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 21.12.07