Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

О гипотезе Локетта для пар классов Фиттинга

В. В. Шпаков, Н. Т. Воробьев

1. Постановка задачи

В теории классов Фиттинга решение многих задач описания структуры классов и их классификации связано с применением операторов „$*$" и „$_*$", которые были определены Локеттом [1]. Для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ и $\mathfrak{F}_*$ – пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. В дальнейшем класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ стали называть классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Известна следующая характеризация [1] нормальных классов Фиттинга: класс Фиттинга нормален тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп. Ввиду свойств операторов Локетта следует, что если $\mathfrak{X}$ – некоторый нормальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{X}_* = \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. Кроме того, для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет место равенство $(\mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{X}^*) = (\mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{S}) = \mathfrak{F}^*$, и поэтому $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Заметим также, что $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. В связи с этим Локеттом [1] была сформулирована проблема, которая в настоящее время известна как

Гипотеза Локетта ($\mathfrak{L}$-гипотеза). *Каждый ли разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется как пересечение класса Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ и некоторого нормального класса Фиттинга $\mathfrak{X}$?*

Брайсом и Косси [2], было показано, $\mathfrak{L}$-гипотеза верна для всех тех и только тех классов Фиттинга, для которых имеет место равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{S}_*$. В [2] также была подтверждена справедливость $\mathfrak{L}$-гипотезы для локальных наследственных классов Фиттинга.

В последующем Бейдельманом и Хауком [6] была установлена справедливость $\mathfrak{L}$-гипотезы для локальных классов Фиттинга вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$, а позднее Н.Т. Воробьевым [3] $\mathfrak{L}$-гипотеза была подтверждена для любых локальных классов Фиттинга.

Развивая исследования в этом направлении, Брайс и Косси [2] предложили понятие Локетта пары классов Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ классы Фиттинга, то пару $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ следуя 5.2 [2], назовем Локетта парой или $\mathfrak{L}$-парой, если $\mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$. Заметим, что если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет обобщенной гипотезе Локетта (гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$), которая была сформулирована Дерком и Хоуксом в X.1.19 [4]. В частности, в универсуме $\mathfrak{S}$ пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{S})$ является Локетта парой в точности тогда, когда для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедлива гипотеза Локетта.

Поиск общих закономерностей в этом направлении исследований приводит к следующей проблеме.

Проблема. *Каковы классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, для которых пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой?*

До настоящего времени указанная проблема решена лишь для некоторых значений классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$: Брайсом, Косси [2] для случая, когда $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ локальные наследственные классы, Н.Т. Воробьевым [3] для случая, когда $\mathfrak{F}$ – локальный класс

Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – F-инъекторно замкнутый класс Фиттинга; Галледжи [5] для случая, когда $\mathfrak{F}$ локален и $\mathfrak{H}$ – класс Фишера, Бризоном [7] для $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{H}$ ($\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех конечных разрешимых π-групп).

В настоящей работе выявлены новые общие закономерности построения Локетта пар. Установлено, что пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является Локетта парой в случае, когда $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга, а $\mathfrak{H}$ обобщенный наследственный класс Фиттинга (в частности класс Фишера). Заметим, что из основного результата (теорема 5.4) следуют все полученные ранее результаты (теорема 4.17 [2], [3], 4.7 [5], 3.2.1, 3.2.2 [6], X.6.10 [4], 6.5 [7], 4.3.1 [8]), подтверждающие гипотезу Локетта для различных семейств классов Фиттинга.

Для доказательства основной теоремы мы определяем новое семейтсво классов Фиттинга, которые назовем Λ-классами Фишера. Заметим, что специальными случаями Λ-классов Фишера является хорошо известные своими приложениями для характеризации классов и описания канонических подгрупп классы Фишера (IX.3.3 [4]).

С учетом известной теоремы С.А. Чунихина [9] о том, что холловы π-подгруппы существуют и сопряжены в любой конечной π-разрешимой группе, основной результат работы остается верным в классе $\mathfrak{S}^\pi$ – всех конечных π-разрешимых групп, хотя результаты являются новыми и в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп.

2. Предварительные сведения

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга [4], если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, подгруппа $G_\mathfrak{F}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы G [4], если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Произведением классов Фиттинга [4] $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс всех тех групп G, факторгруппы по $\mathfrak{F}$-радикалу которых являются $\mathfrak{H}$-подгруппами. Хорошо известно, что произведение двух классов Фиттинга снова является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см, например, (IX.1.12, [4])).

Приведем в качестве следующей леммы известные свойства операторов Локетта „*“ и „$_*$“, которые мы будем использовать

Лемма 2.1 [1]. *Для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедливы следующие соотношения: $\mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ класс всех абелевых групп.*

Напомним, что если G и H некоторые группы, то через $Snemb(S \to G)$ обозначают множество всех субнормальных вложений G в H (мономорфизм $\alpha : G \to H$ такой, что $G\alpha$ субнормальна в G называют субнормальным вложением G в H). Мы будем использовать также подгруппу $N(G)$, которая была определена в работе [5]. Напомним, что если G – некоторая группа, то подгруппа $N(G)$ определяется следующим образом

$$N(G) =< x^{-1}x^\alpha : x \in S \lhd \lhd G, \alpha \in Snemb(S \to G) > .$$

Приведем теперь в качестве лемм необходимые в дальнейшем свойства подгруппы $N(G)$.

Лемма 2.2 (3.1 [5]). *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) $G' \subseteq [G, AutG] \subseteq N(G)$;

2) если $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $G \in \mathfrak{X}$, то $N(G) \subseteq G_{\mathfrak{X}_*}$.

Лемма 2.3 (4.1 [5]). *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, тогда следующие утверждения эквивалентны*

1) $\mathfrak{F}_* \bigcap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$;

2) $N(G) \cap G_{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{Y}}$ *для всех* $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G называется холловой π-подгруппой, если порядок H является π-числом, а индекс H в G – π'-число. Обозначим, через $Hall_\pi(G)$ – множество всех холловых π-подгрупп группы G. Мы будем использовать следующие известные свойства холловых π-подгрупп.

Лемма 2.4 (I.3.2 [4]). *Пусть* $G_\pi \in Hall_\pi(G)$, M *и* N *– нормальная подгруппа группы* G. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1)$G_\pi \bigcap N \in Hall_\pi(N)$;

2) $G_\pi \bigcap MN = (G_\pi \bigcap M)(G_\pi \bigcap N) \in Hall_\pi(MN)$;

3) $G_\pi N/N \in Hall_\pi(G/N)$.

Напомним хорошо известное тождество Дедекинда, которое представляет

Лемма 2.5 (A.1.3 [4]). *Пусть* U, V *и* W *подгруппы группы* G, *причем* $V \subseteq U$, *тогда* $U \cap VW = V(U \cap W)$.

Если M подгруппа группы G, то фокальной подгруппой M в G, называется подгруппа, которая обозначается как $F_G(M)$ и определяется следующим образом:

$$F_G(M) =< [m, g] : m \in M, g \in G \text{ и } [m, g] \in M >$$

Мы также будем использовать известную теорему о фокальной подгруппе, которую представляет следующая

Лемма 2.6 (A.17.5 [4], см. также 21.3 [10]). *Пусть H – холлова подгруппа группы G, тогда* $G' \cap H = F_G(M)$.

Напомним, что отображение $f : \mathbb{P} \to$ {классы Фиттинга} называют функцией Хартли или Н-функцией [11]. Пусть $LR(f) = \mathfrak{S}_\pi \bigcap(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [4], если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой Н-функции f. При этом $\pi = Supp(f)$ – носитель Н-функции f и $\pi = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \emptyset\}$

Н-Функцию класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют [11]:

1) приведенной, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$;

2) полной, если $f(p)\mathfrak{N}_p = f(p)$ для каждого $p \in \mathbb{P}$;

3) полной приведенной, если f является одновременно приведенной и полной.

Все рассматриваемые нами группы конечны и разрешимы. В терминологии и обозначениях мы следуем монографии Дерка, Хоукса [4].

3. Подгруппа $N(G)$ и холловы π-подгруппы

Докажем необходимые нам в дальнейшем свойства подгруппы $N(G)$, определяемые посредством холловых π-подгрупп.

Лемма 3.1 *Если* $G_\pi \in Hall_\pi(G)$ *и* $\emptyset \neq \pi \subset \mathbb{P}$, *то*

$$G_\pi \cap N(G) =< x^{-1}x^\alpha : x \in S \lhd \lhd G, \alpha \in Snemb(S \to G), \text{ и } x, x^\alpha \in G_\pi >$$

Доказательство. Пусть $< x^{-1}x^\alpha : x \in S \lhd \lhd G, \alpha \in Snemb(S \to G)$ и $x, x^\alpha \in G_\pi >= H_0$. Из определения подгруппы $N(G)$ следует, что все ее элементы имеют вид $g^{-1}g^\alpha$, где $g \in S \lhd \lhd G$ и $\alpha \in Snemb(S \to G)$. Пусть $g = xy$, где x – π-элемент, а y – π'-элемент и x,y $\in< g >\subseteq S$. Тогда справедливо равенство $g^{-1}g^\alpha O^\pi(G)G' =$

$y^{-1}x^{-1}x^{\alpha}y^{\alpha}O^{\pi}(G)G'$. Следуя доказательству свойства 4.2 [5] заключаем $g^{-1}g^{\alpha}O^{\pi}(G)G' = x^{-1}x^{\alpha}O^{\pi}(G)G'$. Так как $G_{\pi} \in Hall_{\pi}(G)$, то существуют элементы $a,b \in G$, такие что $x^a \in G_{\pi}$ и $(x^{\alpha})^b \in G_{\pi}$. Следовательно, $x^{-1}x^{\alpha}O^{\pi}(G)G' = (x^a)^{-1}(x^{\alpha})^b O^{\pi}(G)G'$. Заметим, что S^{α} и $(S^{\alpha})^b$ субнормальны в G и существует изоморфизм S^{α} на $(S^{\alpha})^b$ переводящий элемент x^a в $(x^{\alpha})^b$. Значит, $(x^a)^{-1}(x^{\alpha})^b \in H_0$ и $g^{-1}g^{\alpha} \in H_0O^{\pi}(G)G'$. Следовательно, подгруппа $N(G) \subseteq H_0O^{\pi}(G)G'$. Так как по условию $H_0 \subseteq G_{\pi}$, то по лемме 2.5. $G_{\pi} \cap H_0O^{\pi}(G)G' = H_0(G_{\pi} \cap O^{\pi}G')$. Заметим, что факторгруппа $O^{\pi}(G)G'/G' \in \mathfrak{E}_{\pi'}$ является π'-группой. Очевидно, справедливо включение $G_{\pi} \cap G' \subseteq G_{\pi} \cap O^{\pi}(G)G'$. Теперь ввиду того, что $|O^{\pi}(G)G' : G'|$ – π'-число следует, что холлова π-подгруппа группы $O^{\pi}(G)G'$ содержится в G'. Следовательно, по утверждению 1 леммы 2.4 $G_{\pi} \cap O^{\pi}(G)G' \subseteq G'$. Таким образом, $G_{\pi} \cap O^{\pi}(G)G' = G_{\pi} \cap G'$. По лемме 2.6 $G_{\pi} \cap G' \subseteq H_0$. Значит, $G_{\pi} \cap N(G) \subseteq H_0$. Кроме того, очевидно, $H_0 \subseteq G_{\pi} \cap N(G)$. Таким образом, $H_0 = G_{\pi} \cap N(G)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2 *Пусть $G_{\pi} \in Hall_{\pi}(G)$, где $\emptyset \neq \pi \subset \mathbb{P}$, и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. Тогда $G_{\pi} \cap N(G) \subseteq N(G_{\pi}G_{\mathfrak{X}})$.*

Доказательство. По лемме 2.1 подгруппа $G_{\pi} \cap N(G)$ состоит из таких элементов $x^{-1}x^{\alpha}$, что $x \in S \lhd \lhd G$, $\alpha \in Snemb(S \to G)$ и $x,x^{\alpha} \in G_{\pi}$. Заметим, что подгруппа $< x > S_{\mathfrak{X}} =< x > (S \cap G_{\mathfrak{X}}) = S\cap < x > G_{\mathfrak{X}}$ субнормальна в $G_{\pi}G_{\mathfrak{X}}$. Аналогично, $(< x > S_{\mathfrak{X}})^{\alpha} =< x^{\alpha} > S_{\mathfrak{X}}^{\alpha}$ субнормальна в $G_{\pi}G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $x^{-1}x^{\alpha} \in N(G_{\pi}G_{\mathfrak{X}})$. Лемма доказана.

4. Λ-Классы Фишера

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Фишера (IX.3.3 [4]), если из того, что $G \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H группы G, содержащей нормальную подгруппу K группы G такую, что H/K является p-группой для некоторого $p \in \mathbb{P}$, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Расширим понятие класса Фишера следующим образом. Пусть Λ такое непустое множество, что выполняются следующие условия:

(1) $\mathbb{P} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi(\lambda)$;

(2) $\pi(\lambda) \neq \emptyset$ для всех $\lambda \in \Lambda$;

(3) $\pi(\lambda) \cap \pi(\mu) = \emptyset$ для $\lambda \neq \mu$ и $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Пусть в дальнейшем Λ непустое множество, удовлетворяющее условиям (1)-(3).

Следуя (IX.3.3 [4]), введем

Определение 4.1 *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем Λ-классом Фишера, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H группы G, содержащей нормальную подгруппу K группы G такую, что H/K является $\pi(\lambda)$-группой для некоторого $\lambda \in \Lambda$, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.*

В случае, когда $\Lambda = \mathbb{P}$ и $\pi(p) = \{p\}$ для каждого $p \in \mathbb{P}$, Λ-класс Фишера является классом Фишера, хотя обратное в общем случае неверно. Заметим также, что семейство Λ-классов Фишера обширно, так как ввиду леммы 2 [3] каждый локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Λ-классом Фишера в случае, когда $\Lambda = \mathbb{P}$ и $\pi(p) = \{p\}$ для всех $p \in Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$.

Напомним, что через $Char(\mathfrak{F})$ обозначают характеристику класса $\mathfrak{F}$, которая определяется как множество всех таких простых p, для которых Z_p циклическая группа порядка p принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 4.2 *Каждый Λ-класс Фишера замкнут относительно произведений вида $G_{\pi(\lambda)}N$, где $G_{\pi(\lambda)}$ – холлова $\pi(\lambda)$-подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – Λ-класс Фишера и $G \in \mathfrak{F}$. Если $K \lhd G$ и $K \subseteq H$ причем $H/K \in \mathfrak{E}_{\pi(\lambda)}$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Тогда по утверждению 3 леммы 2.4 $H/K = G_{\pi(\lambda)}K/K \in \mathfrak{E}_{\pi(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda)$. Но $\mathfrak{F}$ является Λ-классом Фишера, и поэтому $G_{\pi(\lambda)}K \in \mathfrak{F}$.Лемма доказана.

5. $\mathfrak{L}$-Пары и гипотеза Локетта

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, удовлетворяет гипотезе Локетта, в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп, если $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{S}_*$. Дерком и Хоуксом (см. X.1.19 [4]) была предложена задача описания классов Фиттинга удовлетворяющих гипотезе Локетта в произвольном классе Фиттинга $\mathfrak{H}$, которую представляет

$\mathfrak{L}_{\mathfrak{H}}$-гипотеза. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Каковы классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{H}_*$.*

Следуя Брайсу и Косси [2], мы будем рассматривать общий вариант этой гипотезы.

Определение 5.1 *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Пару $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ назовем парой Локетта или $\mathfrak{L}$-парой, если $(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{H}_*$.*

Заметим, что если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ – $\mathfrak{L}$-пара, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет $\mathfrak{L}_{\mathfrak{H}}$-гипотезе. В частности, если $(\mathfrak{F}, \mathfrak{S})$ является $\mathfrak{L}$-парой, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе, предложенной Локеттом [1].

Следуя Галледжи [5], определим класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ со следующими свойствами.

Определение 5.2 *Пусть Λ – непустое множество со свойствами (1)-(3) (см. п.4) и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда:*

(а) $\mathfrak{F}$ обладает свойством $(g_{\pi(\lambda)})$, если существует класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi(\lambda)} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi(\lambda)}\mathfrak{S}_{\pi'(\lambda)}$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$;

(б) $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ), если $\mathfrak{F}$ обладает свойством $(g_{\pi(\lambda)})$ для всех $\lambda \in \Lambda$ таких, что $\pi(\lambda) \subseteq Char(\mathfrak{F})$.

Напомним, понятие ω-локального класса Фиттинга, которое было предложено Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой [12].

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга$\}$, где $\omega \subseteq \mathbb{P}$, называют ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной H-функцией. Для всякой ω-локальной H-функции f полагаем $Supp(f) = \{a \in \omega \cup \omega' | f(a) \neq \emptyset\}$.

Пусть f – произвольная ω-локальная H-функция, $\pi_1 = Supp(f) \cap \omega$ и $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-локальным, если $\mathfrak{F} = (\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{S}_{p'}) \bigcap (\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) \bigcap f(\omega')\mathfrak{S}_{\omega d}$.

Обширность семейства классов со свойствами $(g_{\pi(\lambda)})$ и (g_Λ) подтверждает

Пример 5.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга с $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, $\Lambda = \omega$ и $\pi(p) = \{p\}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда ввиду результата [13] $\mathfrak{F}$ обладает наибольшей приведенной H-функцией F такой, что $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех $p \in Char(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга со свойством (g_Λ). В частности, любой локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ), если $\Lambda = \mathbb{P}$.

Докажем основной результат работы – теорему, определяющую условия, при которых пары классов Фиттинга являются $\mathfrak{L}$-парами.

Теорема 5.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – Λ-класс Фишера. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\mathfrak{F}$ обладает свойством $(g_{\pi(\lambda)})$, то $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{\pi'(\lambda)}$;

2) если $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ), то пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой.

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Покажем вначале, что $N(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \in (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\pi'}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $G_\pi \in Hall_\pi(G)$. По условию $\mathfrak{F}$ обладает свойством $(g_{\pi(\lambda)})$, и поэтому $\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ для некоторого класса Фиттинга $\mathfrak{Y}$. Так как $(G_\pi G_{\mathfrak{Y}})_{\mathfrak{Y}} = G_\pi G_{\mathfrak{Y}} \cap G_{\mathfrak{Y}}$, то $G_\pi G_{\mathfrak{Y}}/(G_\pi G_{\mathfrak{Y}})_{\mathfrak{Y}} = G_\pi G_{\mathfrak{Y}}/G_\pi G_{\mathfrak{Y}} \cap G_{\mathfrak{Y}} = G_\pi G_{\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{Y}}$. По утверждению 3, леммы 2.4 $G_\pi G_{\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{S}_\pi$. Значит, $G_\pi G_{\mathfrak{Y}}/(G_\pi G_{\mathfrak{Y}})_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{S}_\pi$ и по определению произведения классов Фиттинга $G_\pi G_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi$. Заметим, что $G_\pi G_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{F}$ и $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$, отсюда $(G_\pi G_{\mathfrak{Y}})_{\mathfrak{F}} = (G_\pi \cap G_{\mathfrak{F}})(G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{Y}} = (G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{S}_\pi}(G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{Y}} \subseteq (G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi}$. Так как по лемме 4.2 $G_\pi G_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{H}$, то $G_\pi G_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}$. По лемме 3.2 $G_\pi \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq N(G_\pi G_{\mathfrak{Y}}) \cap G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, по утверждению 2, леммы 2.2 $N(G_\pi G_{\mathfrak{Y}}) \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq (G_\pi G_{\mathfrak{Y}} \cap G_{\mathfrak{F}})_{(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*}$. Получим $G_\pi \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*}$. Теперь $G_\pi \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*} \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $G_\pi \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq (N(G) \cap G_{\mathfrak{F}})_{(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*}$. Это означает, что $G_\pi \cap N(G) \cap G_{\mathfrak{F}}$ содержится в $(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$-радикале группы $N(G) \cap G_{\mathfrak{F}}$. Отсюда вытекает, что $N(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \in (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\pi'}$. Следовательно, по лемме 2.3 справедливо включение $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\pi'}$.

Докажем второе утверждение. Ввиду утверждения 1) покажем, что если $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\pi'(\lambda)}$ для всех $\pi(\lambda) \subseteq Char(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})$, то $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$. Ввиду леммы 2.1, справедливо включение $(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_*$. Пусть $G \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_*$ и G минимального порядка из класса $(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_*) \backslash (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$. Тогда G имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $M = G_{(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*}$. Так как $G \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_*$ и по лемме 2.1 $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}$. Ввиду того, что $G \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}$, по лемме 2.1 $G/M \in \mathfrak{A}$. Так как M максимальная нормальная подгруппа группы G, то G/M – композиционный фактор группы G порядка p. Следовательно, $G/M \in \mathfrak{N}_p$ и $G/M \cong Z_p$. Таким образом, $p||G|$ и $G \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_*$. Но по лемме 2.1 $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}$. Следовательно, $Z_p \in \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}$, и поэтому $p \in Char(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})$. Отсюда следует, что существует μ такое, что $p \in \pi(\mu) \subseteq Char(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})$. Значит, $G/M \in \mathfrak{S}_{\pi(\mu)}$.

С другой стороны, по условию для $\pi(\mu) \subseteq Char(\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})$ справедливо включение $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\pi'(\mu)}$. Значит, $G/M \in \mathfrak{S}_{\pi'(\mu)}$. Следовательно, $G/M \in \mathfrak{S}_{\pi(\mu)} \bigcap \mathfrak{S}_{\pi'(\mu)} = (1)$ и $G = M \in (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$. Полученное противоречие доказывает равентсво $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$.

Для завершения доказательства второго утверждения теоремы достаточно показать, что $\mathfrak{F}$ – класс Локетта. По условию $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ), и поэтому $\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ для некоторого класса Фиттинга $\mathfrak{Y}$ и всех $\pi = \pi(\lambda) \subseteq Char(\mathfrak{F})$. По лемме 1.1 $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'})^*$. Ввиду следствия 3 [14], $(\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'})^* = \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$, и поэтому $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$. Тогда $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi'}$ для всех $pi(\lambda) \in Char(\mathfrak{F}) = Char(\mathfrak{F}^*)$ (см. X.1.20 [4]). Теперь, следуя доказательству равенства $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$, по индукции заключаем, что $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$, и поэтому $\mathfrak{F}$ является классом Локетта.

Итак, пара классов Фиттинга $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой. Теорема доказана.

Следствие 5.5 (Галледжи 4.7 [5]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – класс Фишера такой, что $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$, для некоторого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и всех $p \in Char(\mathfrak{F})$. Тогда $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = \mathbb{P}$ и $\pi(p) = \{p\}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда $\mathfrak{H}$ – Λ-класс Фишера и класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ). По теореме 5.4 пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой, то есть $\mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$.

Следствие 5.6 (Залесская Е.Н. 4.3.1 [8]). *Каждый ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = \mathbb{P}$ и $\pi(p) = \{p\}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда $\mathfrak{S}$ – Λ-класс Фишера. Ввиду теоремы [13], класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает наибольшей приведенной функцией Хартли F такой, что $F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех $p \in Char(\mathfrak{F})$.

Следовательно, для $\mathfrak{F}$ выполняется условие (g_Λ). Но тогда по теореме 5.4 пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{S})$ является $\mathfrak{L}$-парой и $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{L}$-классом .

Следствие 5.7 (Воробьев Н.Т. [3]). *Каждый локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга. Предположим $\pi(p) = \{p\}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда ввиду теоремы [13] $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ). Очевидно, что класс $\mathfrak{S}$ является Λ-классом Фишера. По теореме 5.4 пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{S})$ является $\mathfrak{L}$-парой, то есть $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{S}_*$ и для $\mathfrak{F}$ верна гипотеза Локетта.

Следствие 5.8 (Брайс и Косси 4.17 [2]). *Если $\mathfrak{F}$ – примитивная насыщенная формация и $\mathfrak{H}$ – наследственный класс Фиттинга, то $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой.*

Доказательство. Ввиду теоремы Брайса и Косси [15] каждая примитивная насыщенная формация является в точности наследственным классом Фиттинга. Но ввиду результата [16] каждый наследственный класс Фиттинга является локальным. Следовательно, по теореме [13] $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ) для $\Lambda = \mathbb{P}$ а $\pi(p) = \{p\}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Кроме того, очевидно, $\mathfrak{H}$ является Λ-классом Фишера. Следовательно, по теореме 5.4 пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой.

Следствие 5.9 (Бейдельман и Хаук 3.2.1 [6]). *Пусть $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}, \mathfrak{F}\mathfrak{N}\}$, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и π – множество простых чисел. Тогда $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$ является $\mathfrak{L}$-парой и $\mathfrak{X}$ удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = \mathbb{P}$ и $\pi(p) = \{p\}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Так как по следствию 3 [14], $\mathfrak{X}$ – локальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{X}$ по теореме [13] обладает свойством (g_Λ). Учитывая, что класс $\mathfrak{S}$ – Λ-класс Фишера, по теореме 5.4 получаем, что $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$ является $\mathfrak{L}$-парой, то есть $\mathfrak{X}^* \bigcap \mathfrak{S}_* = \mathfrak{X}_*$.

Следствие 5.10 (Дерк и Хоукс X.6.10 [4]). *Пусть $\{\mathfrak{X}_i | i \in I\}$ – множество наследственных классов Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – наследственный класс Фиттинга. Тогда $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$, где $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi'}$, является $\mathfrak{L}$-парой.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = \mathbb{P}$ и $\pi(\lambda) = \{p\}$ для всех $\lambda \in \Lambda$. По лемме 2 [14] $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга. Следовательно, $\mathfrak{F}$ по теореме [13] обладает свойством (g_Λ). Так как $\mathfrak{H}$ – наследственный класс Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – Λ-класс Фишера по теореме 5.4 получаем, что $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой.

Следствие 5.11 (Бризон 6.5 [7]). *Пусть π - множество простых чисел. Тогда $(\mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{S})$ является $\mathfrak{L}$-парой*

Доказательство. Пусть $\Lambda = \mathbb{P}$ и $\pi(\lambda) = \{p\}$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Так как $\mathfrak{S}_\pi$ – локальный класс Фиттинга, то по теореме [13] он обладает свойством (g_Λ). Кроме того, очевидно, что класс $\mathfrak{S}$ – Λ-класс Фишера. Тогда по теореме 5.4 получаем, что $(\mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{S})$ является $\mathfrak{L}$-парой, то есть $\mathfrak{S}_\pi \bigcap \mathfrak{S}_* = (\mathfrak{S}_\pi)_*$.

Тот факт, что класс Фиттинга обладающий свойством (g_Λ) в общем случае не локален подтверждает следующий пример.

Пример 5.12. *Пусть $\mathfrak{X} = FitA_5$ – класс Фиттинга, порожденный знакопеременной группой из пяти символов, $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$ и $\omega = \{p\}$, где p – простое число. Покажем, что $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ) и не является локальным.*

Пусть

$$\mathfrak{F}(F^p) = \begin{cases} Fit(G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}} : G \in \mathfrak{F}), \text{ если } p \in \pi(\mathfrak{F}) \\ \emptyset, \text{ если } p \notin \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Так как $\mathfrak{F}(F^p) \subseteq \mathfrak{X}$ и, следовательно, $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$, то по тереме 9 [12] $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга для $\omega = \{p\}$ и $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Λ).

Покажем, что $Char(\mathfrak{F}) = \{p\}$, где p – некоторое простое число.

Так как $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$, то $Char(\mathfrak{N}_p) \subseteq Char(\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p)$. Но $Char(\mathfrak{N}_p) = \{p\}$. Следовательно, $p \in Char(\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p)$. Предположим, что $q \in Char(\mathfrak{F})$ и $q \neq p$. Тогда $Z_q \in \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$. Следовательно, $Z_q/(Z_q)_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}_p$.

Тогда возможны два случая: $Z_q = (Z_q)_{\mathfrak{X}}$ и $(Z_q)_{\mathfrak{X}} = (1)$.

Если $Z_q = (Z_q)_{\mathfrak{X}}$, то $Z_q \in \mathfrak{X}$ и $q \in Char(\mathfrak{X})$. Но $Char(\mathfrak{X}) = \emptyset$, так как, согласно примеру II.2.13 [4], $\mathfrak{X} = FitA_5 = FormA_5 = D_0(A_5)$. Значит, в данном случае $Char(\mathfrak{F}) = \{p\}$.

Пусть теперь $(Z_q)_{\mathfrak{X}} = (1)$. Тогда $Z_q \in \mathfrak{N}_p$ и $q \in Char(\mathfrak{N}_p)$. Следовательно, $q = p$ и $Char(\mathfrak{F}) = \{p\}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{F}$ нелокален. Предположим, что $\mathfrak{F} = LR(f)$, где f – полная приведенная H-функция. Тогда по утверждению 4.9 (b) [5] $Char(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Так как в данном случае $Char(\mathfrak{F}) = \{p\}$, а $|\pi(\mathfrak{F})| > 1$, то получаем противоречие с тем, что $Char(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ не является локальным классом Фиттинга.

Abstract. The paper considers Lockett hypothesis for pairs of Fitting classes. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be Fitting classes. A pair $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ is called a Lockett pair, if $\mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H})_*$. It is proved, that $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ is a Lockett pair, if $\mathfrak{F}$ is an ω-local Fitting class with given characteristic and $\mathfrak{H}$ is a Fischer Λ-class. In particular, if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, then for $\mathfrak{F}$ the Lockett conjecture in $\mathfrak{H}$ is true.

Литература

1. Lockett, P. Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / P. Lockett // Math. Z., 1974. — Bd. 137, № 2. — S. 131–136.

2. Bryce, R. A. A problem i№ theory of normal Fitting classes / R. A. Bryce, J. Cossey // Math. Z., 1975. — Band 141, № 2. — S. 99 — 110.

3. Воробьев, Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н. Т. Воробьев // Математические заметки, 1988. Т. 43, № 2. — С. 161-167.

4. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

5. Gallego M. P. Fitting pairs from direct limits and the lockett conjecture / M. P. Gallego // Comm. Algebra, 1996. — 24(6). — p. 2011-2023.

6. Biedleman, J. C. Über Fittingklasse№ und die Lockett-Vermutung / J. C. Biedleman, Hauck P. // Math. Z., 1979. Bd. 167, № 2. — S. 161–167.

7. Brison, O. J. Hall operators for Fitting classes /O. J. Brisо№ // Arch. Math., 1979. — Bd. 33. — s. 1–9.

8. Залесская, Е. Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами функций Хартли диС. ... канд. физ. -маТ. наук: 01. 01. 06 / Е. Н. Залесская. — Витебск, 2005. — 85 л.

9. Чунихин С. А. Подгруппы конечных подгрупп. Минск: Наука и техника, 1964. — 168 С.

10. Белоногов В. А. Задачник по теории групп. Наука, Москва, 2000.

11. Воробьев Н. Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н. Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал, 1996. — Т. 37, № 5. — С. 1296–1302

12. Скиба А. Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба // Математические труды, 1999. — Т. 2, № 2. — С. 114–147.

13. Воробьев Н. Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н. Т. Воробьев // Известия Гомельского гоС. ун-та, 1999. — № 1 (15). — С. 8–13.

14. Воробьев Н. Т. Локальные произведения классов Фиттинга / Н. Т. Воробьев // Весцi АН БССР. Сер. фiз. матэм. навук, 1991. — № 6. — С. 22–26.

15. Bryce, R. A. Fitting formations of finite soluble groups / R. A. Bryce, J. A. Cossey // Math. Z., 1972. — Band 127. — S. 217–223.

16. Воробьев Н. Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга / Н. Т. Воробьев // Матем. заметки, 1992. — Т. 51, вып. 3. — С. 3–8.

Витебский государственный
университет им. П. М. Машерова

Поступило 17.01.08