Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(56), 2009

УДК 517.5

Расширение функционального исчисления Хилле-Филлипса

А. Р. Миротин

В основополагающей монографии [1], гл. XV–XVI построено функциональное исчисление генераторов C_0-полугрупп, использующее класс $\boldsymbol{LM}$ функций, представимых в виде преобразований Лапласа:

$$La(s) := \int_0^\infty e^{st} da(t)\ (s<0)$$

σ-конечных комплексных регулярных борелевских мер $a \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}_+)$. При этом условия, налагаемые в [1] на меру и полугруппу, приводят к тому, что возникающие в результате операторы ограничены. Там же (с. 463) поставлена задача построения расширения этого исчисления, приводящего к неограниченным операторам. В работе предлагается подход к такому расширению. Необходимость исчисления подобного типа вызвана также потребностями функционального исчисления Бохнера-Филлипса, использующего класс $\boldsymbol{T}$ отрицательных функций Бернштейна (см., например, [2 – 5]). Всюду ниже A есть генератор C_0-полугруппы T в банаховом пространстве X. Конец доказательства обозначается знаком.

Определение 1. Для функции g из $\boldsymbol{LM}$, $g = La$, $a \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}_+)$ положим

$$g(A)x = \int_0^\infty T(r)x da(r),$$

где область определения $D_0(g(A))$ этого оператора состоит из тех $x \in X$, для которых интеграл в правой части существует в смысле Бохнера.

Прежде всего, нас интересуют условия, при которых оператор $g(A)$ будет плотно определен и замыкаем.

Теорема 1. 1) Если $\operatorname{Im} A \subset D_0(g(A))$, то оператор $g(A)A$ ограничен относительно A;

2) если дополнительно предположить, что оператор A инъективен, то $g(A)$ замыкаем на подпространстве $D(A) \cap D_0(g(A))$, наделенном нормой графика;

3) если $\int_0^\infty \|T(r)\| d|a|(r) < \infty$, то оператор $g(A)$ ограничен на X. Кроме того, рассматриваемое исчисление согласовано с классическим исчислением Хилле-Филлипса.

Доказательство. 1) Для любого $x \in D(A)$ определим операторы

$$B_n x = \int_0^n T(r)Ax da(r),$$

(интеграл существует в смысле Бохнера, так как функция $r \mapsto \|T(r)\|$ ограничена на $[0,n]$ по принципу равномерной ограниченности). Поскольку у нас $Ax \in D_0(g(A))$, то $B_n x \to g(A)Ax\ (n \to \infty)$ при всех $x \in D(A)$. Далее, так как оператор A замкнут, то пространство $Y = D(A)$, наделенное нормой графика $\|x\|_Y = \|x\| + \|Ax\|$, банахово. Кроме того, $B_n \in LB(Y, X)$, поскольку

$$\|B_n x\| \le \left(\int_0^n \|T(r)\| d\,|\,a\,|(r) \right) \|x\|_Y .$$

В силу теоремы Банаха-Штейнгауза оператор $g(A)A$ тоже принадлежит $LB(Y, X)$, а потому ограничен относительно A.

2) Заметим сначала, что при $x \in D(A) \cap D_0(g(A))$ справедливо равенство

$$Ag(A)x = g(A)Ax. \tag{1}$$

Действительно, с учетом замкнутости A и сходимости интегралов имеем

$$g(A)Ax = \int_0^\infty T(r)Axda(r) = \int_0^\infty AT(r)xda(r) = Ag(A)x,$$

поскольку $\operatorname{Im} A \subset D_0(g(A))$. Теперь, если A инъективен, то с помощью утверждения 1) получаем, что оператор $g(A) = A^{-1}g(A)A$ замыкаем на подпространстве $D(A) \cap D_0(g(A))$ пространства Y как произведение замкнутого и ограниченного операторов.

3) Это следует из свойств интеграла Бохнера.

Следствие 1. Пусть $g = Lf$ есть преобразование Лапласа функции f, причем при x из $D(A)$ существуют $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)T(n)x$ и $\int_0^\infty T(r)xdf(r)$. Тогда $\operatorname{Im} A \subset D_0(g(A))$ и справедливы все утверждения теоремы 1.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем при всех $x \in D(A)$

$$\int_0^n T(r)Axf(r)dr = \int_0^n f(r)dT(r)x = f(n)T(n)x - f(0)x - \int_0^n T(r)xdf(r), \tag{2}$$

причем правая часть имеет предел при $n \to \infty$.

Следствие 2. В условиях части 1 теоремы 1 оператор $g(A)A$ ограничен вместе с A.

Следствие 3. Если в условиях части 1 теоремы 1 оператор A инъективен, то $g(A) | \operatorname{Im} A$ ограничен относительно A^{-1}.

Следствие 4. Если в условиях части 1 теоремы 1 существует ограниченный обратный оператор A^{-1} на $\operatorname{Im} A$, то $g(A)$ ограничен на $\operatorname{Im} A$.

Теорема 2. Пусть $g = Lf$, где функция f такова, что оператор $x \mapsto \int_0^\infty T(r)xdf(r)$ ограничен, а $f(n)T(n) \to B \in LB(D(A))$ сильно. Тогда

1) $\operatorname{Im} A \subset D_0(g(A))$ и оператор $g(A)A$ ограничен на $D(A)$;

2) если оператор A инъективен, то оператор $g(A) | D(A) \cap D_0(g(A))$ замыкаем, а если еще B=0, то замыкаем также и оператор $g(A) | \operatorname{Im}(A)$.

Доказательство. 1) Это включение сразу вытекает из следствия 1. Переходя к пределу в формуле (2), получаем при $x \in D(A)$

$$g(A)Ax = \int_0^\infty T(r)Axf(r)dr = Bx - f(0)x - \int_0^\infty T(r)xdf(r) \tag{3}$$

откуда и следует ограниченность $g(A)A$ на $D(A)$.

2) Первое утверждение следует из 1) и формулы (1), как в доказательстве теоремы 1. Пусть теперь B=0. Полагая в (3) y=Ax, имеем

$$g(A)y = -f(0)A^{-1}y - \int_0^\infty T(r)A^{-1}ydf(r).$$

Но оператор

$$Cy := A\int_0^\infty T(r)A^{-1}ydf(r) = \int_0^\infty AT(r)A^{-1}ydf(r) = \int_0^\infty T(r)ydf(r)$$

ограничен на ImA, а потому оператор

$$g(A)y = -A^{-1}\left(f(0)y + Cy\right)$$

замыкаем на ImA.

В случаях, когда оператор $g(A)$ замыкаем, его замыкание также будет обозначаться $g(A)$.

Следующие теоремы устанавливают связь между рассматриваемым исчислением и исчислением Бохнера-Филлипса. Ниже используется тот факт, что функция ψ из $\boldsymbol{T}$ допускает интегральное представление

$$\psi(s)=\psi(0)+\int_0^\infty \left(e^{su}-1\right)u^{-1}d\rho(u)\ (s<0), \tag{4}$$

где $\rho\geq 0$ – мера на $\boldsymbol{R}_+$, причем $\int_r^\infty u^{-1}d\rho(u)<\infty$ при $r>0$ (см., напр., [3]).

Теорема 3. Пусть $\psi\in \boldsymbol{T}$, $\psi(0)=0$. Тогда функция $\tilde\psi(s):=\psi(s)/s$ принадлежит ***LM*,** и при всех $x\in D(A)\cap D_0(\tilde\psi(A))$ справедливо равенство

$$\psi(A)x=A\tilde\psi(A)x, \tag{5}$$

где $\tilde\psi(A)$ понимается в смысле определения 1, а $\psi(A)$ – в смысле исчисления Бохнера-Филлипса.

Доказательство. В силу формулы (4) и теоремы Фубини

$$\tilde\psi(s)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{su}-1}{s}\right)u^{-1}d\rho(u)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty 1_{[0;u]}(r)e^{sr}dr\right)u^{-1}d\rho(u)=$$

$$=\int_0^\infty e^{sr}\left(\int_0^\infty 1_{[0;u]}(r)u^{-1}d\rho(u)\right)dr=Lf(s),$$

где $f(r)=\int_r^\infty u^{-1}d\rho(u)$, а 1_A – индикатор множества A.

Следовательно, если $x\in D(A)\cap D_0(\tilde\psi(A))$, то

$$\tilde\psi(A)x=\int_0^\infty T(r)xf(r)dr. \tag{6}$$

С другой стороны, по теореме Фубини для интеграла Бохнера

$$\psi(A)x:=\int_0^\infty\left(T(u)-I\right)xu^{-1}d\rho(u)=\int_0^\infty\left(\int_0^u AT(r)xdr\right)xu^{-1}d\rho(u)=$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty 1_{[0;u]}(r)AT(r)xdr\right)xu^{-1}d\rho(u)=A\int_0^\infty T(r)x\left(\int_0^\infty 1_{[0;u]}(r)u^{-1}d\rho(u)\right)dr=$$

$$=A\tilde\psi(A)x$$

(теорема Фубини применима, поскольку B-интеграл в (6) сходится).

Следствие 5. Если оператор A имеет ограниченный обратный**,** то оператор $\tilde\psi(A)$ замыкаем на подпространстве $D(A)\cap D_0(\tilde\psi(A))$.

Доказательство. В силу теоремы 4.1 из [4] и ее следствия формула (5) влечет равенство $\tilde\psi(A)x=\psi(A)A^{-1}x$ ($x\in D(A)\cap D_0(\tilde\psi(A))$), правая часть которого есть произведение замкнутого и ограниченного операторов.

Следствие 6. Оператор $\tilde\psi(A)$ отображает $D(A)\cap D_0(\tilde\psi(A))$ в $D(A)$.

Следствие 7. Оператор A отображает $D(A)\cap D_0(\tilde\psi(A))$ в $D_0(\tilde\psi(A))$.

Положим

$$LM_T:=\left\{g\in LM\mid g=La, \forall x\in D(A)\cap D_0(g(A))\lim_{n\to\infty}a(n)T(n)x=0\right\}.$$

Теорема 4. Пусть $g\in LM_T$, $\psi\in\boldsymbol{T}$, причем функция $h:=g\psi\in LM_T$. Тогда при $x\in D(A)\cap D_0(g(A))\cap D_0(h(A))$ справедливы равенства

$$h(A)x=\psi(A)g(A)x=g(A)\psi(A)x.$$

Доказательство. Можно проверить, что $h=Lb$, где b – мера на $\boldsymbol{R}_+$, с функцией распределения ($a(r)$ – функцией распределения меры a, $a(0)=0$)

$$b(r)=\psi(0)a(r)+\int_0^\infty\left(a(r-u)-a(r)\right)u^{-1}d\rho(u) \tag{7}$$

Также легко проверить, что при $x \in D(A) \cap D_0(g(A))$

$$g(A)x = \int_0^\infty T(r)(-Ax)a(r)dr\,. \tag{8}$$

Следовательно, при этих *x* справедливо равенство

$$(T(u)-I)g(A)x = \int_0^\infty T(u+r)(-Ax)a(r)dr - \int_0^\infty T(r)(-Ax)a(r)dr =$$

$$= \int_0^\infty T(r)(-Ax)(a(r-u)-a(r))dr.$$

Поэтому и с учетом (7) при $x \in D(A) \cap D_0(g(A)) \cap D_0(h(A))$ имеем (не нарушая общности можно считать $\psi(0)=0$)

$$\int_0^\infty \big(T(u)-I\big)g(A)xu^{-1}d\rho(u) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty T(r)(-Ax)(a(r-u)-a(r))dr \right) u^{-1}d\rho(u) =$$

$$= \int_0^\infty T(r)(-Ax)\left(\int_0^\infty (a(r-u)-a(r))u^{-1}d\rho(u) \right)dr = \int_0^\infty T(r)(-Ax)b(r)dr = h(A)x$$

(аналог (8) справедлив и для функции *h*). Это доказывает первое равенство.

Наконец заметим, что операторы *T*(*u*) и *g*(*A*) коммутируют, а потому

$$h(A)x = \psi(A)g(A)x = \int_0^\infty g(A)\big(T(u)-I\big)xu^{-1}d\rho(u) =$$

$$= g(A)\int_0^\infty \big(T(u)-I\big)xu^{-1}d\rho(u) = g(A)\psi(A)x.$$

Следствие 8. Если оператор *g*(*A*) ограничен, то *h*(*A*) замыкаем на $D(A) \cap D_0(h(A))$.

Теорема 5. Пусть полугруппа *T* устойчива, $\psi \in \mathcal{T}$, функция $\psi^r := 1/\psi$, принадлежит LM_T, и оператор $\psi^r(A)$ (в смысле определения 1) ограничен на *X.* Тогда оператор $\psi(A)$ обратим, и $\psi(A)^{-1} = \psi^r(A)$.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Abstract. Extension of functional Hille-Philips calculus is considered in the paper.

Литература

1. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Фил-липс. – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.

2. Carasso A. S., On Subordinate Holomorphic Semigroups / A. S. Carasso, T. Kato // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 327, N 2. – P. 867 – 878.

3. Миротин, А. Р. О *T*-исчислении генераторов C_0-полугрупп / А. Р. Миротин // Сибирский матем. журнал. – 1998. – Т. 39, N 3. – С. 571–583.

4. Миротин, А. Р. Многомерное *T*-исчисление генераторов C_0-полу-групп/А. Р. Миротин // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11, № 2. – С. 142–170.

5. Mirotin, A. R. Criteria for Analyticity of Subordinate Semigroups / A. R. Mirotin // Semigroup Forum. – 2009. – Vol. 78, № 2. – P. 262 – 275.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 28.03.09