Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(50), Ч1, 2008

УДК 512.542

Критерий p-нильпотентности для одного класса конечных групп

Н. В. Гуцко, В. О. Лукьяненко, А. Н. Скиба

1. Введение

Напомним, что подгруппа A группы G называется перестановочной с подгруппой B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется квазинормальной [4] (или, по другому, перестановочной [1, 8]) в G. Подгруппа A является s-квазинормальной (или s-перестановочной) подгруппой в G, если A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G. Если H — подгруппа конечной группы G, то H_{sG} — подгруппа из H, порожденная всеми такими ее подгруппами, которые s-квазинормальны в G. Будем говорить, следуя [7], что H_{sG} — *s-ядро* подгруппы H в группе G.

Все рассматриваемые в дальнейшем группы конечны.

Определение. Пусть H — подгруппа группы G. Тогда будем говорить, что H *хорошо Q-вложена в G*, если существует такая квазинормальная подгруппа T группы G, что $HT = G$ и $T \cap H \leq H_{sG}$.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы, дающей характеризацию p-нильпотентности в терминах хорошо Q-вложенных подгрупп.

Теорема. *Пусть G — группа с нормальной подгруппой E такой, что факторгруппа G/E p-нильпотентна, где p – наименьший простой делитель порядка $|G|$. Предположим, что силовская p-подгруппа P из E содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы из P порядка, равного порядку подгруппы D, и все циклические подгруппы из P порядка 4 (если $|D| = 2$ и P — неабелева 2-группа) хорошо Q-вложены в G. Тогда G p-нильпотентна.*

2. Предварительные результаты

Напомним некоторые известные результаты о субнормальных и s-квазинормальных подгруппах, которые будут использоваться в работе неоднократно.

Лемма 1. *Пусть A, B — подгруппы группы G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если A — субнормальная холлова подгруппа группы G, то A нормальна в G* [9].

(2) *Если A субнормальна в G и A — π-подгруппа, то $A \leq O_\pi(G)$* [9].

(3) *Если A — субнормальная подгруппа группы G и индекс $|G : A|$ — p'-число, то A содержит все силовские p-подгруппы из G* [9].

(4) *Если A s-квазинормальна в G, то A субнормальна в G* [3].

(5) *Если A субнормальна в G, то $A \cap B$ субнормальна в B* [1, A, 14.1].

(6) *Пусть K — нормальная в G подгруппа и $K \leq A$. Тогда A/K субнормальна в G/K в том и только в том случае, когда A субнормальна в G* [1, A, 14.1].

(7) *Если A и B являются субнормальными подгруппами в G, то $\langle A, B\rangle$ — субнормальная в G подгруппа* [1, A, 14.4].

(8) *Если A субнормальна в G и B — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $B \leq N_G(A)$* [1, A, 14.5].

(9) *Пусть A — p-группа для некоторого простого числа p. Тогда A s-квазинормальна в G в том и только в том случае, когда $O^p(G) \le N_G(A)$* [5].

Приведем основные свойства s-ядра.

Лемма 2 [7]. *Пусть G — группа и $H \le K \le G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *H_{sG} — s-квазинормальная подгруппа в G и $H_G \le H_{sG}$.*

(2) *$H_{sG} \le H_{sK}$.*

(3) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда $(K/H)_{s(G/H)} = K_{sG}/H$.*

(4) *Если H является либо силовской подгруппой в G, либо максимальной подгруппой в G, то $H_{sG} = H_G$.*

Отметим некоторые общие свойства хорошо Q-вложенных подгрупп.

Лемма 3. *Пусть G — группа и $H \le K \le G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H s-квазинормальна в G, то H хорошо Q-вложена в G.*

(2) *Пусть H — нормальная в G подгруппа. Тогда K/H хорошо Q-вложена в G/H в том и только в том случае, когда K хорошо Q-вложена в G.*

(3) *Если H хорошо Q-вложена в G, то H хорошо Q-вложена в K.*

(4) *Пусть H — нормальная в G подгруппа. Тогда подгруппа EH/H хорошо Q-вложена в G/H для каждой хорошо Q-вложенной в G подгруппы E такой, что $(|H|, |E|) = 1$.*

(5) *Пусть H — p-подгруппа для некоторого простого числа p. Предположим, что H хорошо Q-вложена, но не s-квазинормальна в G. Тогда в G имеется такая нормальная подгруппа M, что $|G : M| = p$ и $G = HM$.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно.

(2) *Необходимость.* Предположим вначале, что K/H является хорошо Q-вложенной подгруппой в G/H и пусть T/H — квазинормальная подгруппа в G/H такая, что $(K/H)(T/H) = G/H$ и $(T/H) \cap (K/H) \le (K/H)_{s(G/H)}$. Понятно, что T — квазинормальная в G подгруппа. Кроме того, $KT = G$ и ввиду леммы 2(3) $T \cap K \le K_{sG}$. Следовательно, K хорошо Q-вложена в G.

Достаточность. Предположим теперь, что для некоторой квазинормальной подгруппы T из G мы имеем $KT = G$ и $T \cap K \le K_{sG}$. Ясно, что TH/H — квазинормальная в G/H подгруппа. Кроме того, $(TH/H)(K/H) = G/H$ и ввиду леммы 2(3) $(TH/H) \cap (K/H) = (TH \cap K)/H = (T \cap K)H/H \le K_{sG}H/H = K_{sG}/H = (K/H)_{s(G/H)}$. Таким образом, K/H хорошо Q-вложена в G/H.

(3) Пусть T — квазинормальная подгруппа в G такая, что $HT = G$ и $T \cap H \le H_{sG}$. Тогда $K = K \cap HT = H(K \cap T)$ и $K \cap T$ — квазинормальная в K подгруппа. Кроме того, ввиду леммы 2(2) $(K \cap T) \cap H \le H_{sG} \le H_{sK}$. Следовательно, H хорошо Q-вложена в K.

(4) Предположим, что E хорошо Q-вложена в G и пусть T — квазинормальная подгруппа в G такая, что $ET = G$ и $T \cap E \le E_{sG}$. Понятно, что $H \le T$ и поэтому $T \cap EH = (T \cap E)H \le E_{sG}H \le (EH)_{sG}$. Следовательно, EH хорошо Q-вложена в G и поэтому согласно (2) EH/H хорошо Q-вложена в G/H.

(5) Согласно условию в группе G имеется квазинормальная подгруппа T такая, что $HT = G$ и $T \cap H \le H_{sG}$. По лемме 1(4) подгруппа T субнормальна в G и поэтому $T \le K$, где K — некоторая собственная нормальная подгруппа группы G. Значит, G/K — p-группа и поэтому в G имеется нормальная максимальная подгруппа M такая, что $|G : M| = p$ и $HM = G$. Лемма доказана.

Напомним, что формация — это гомоморф $\mathcal{F}$ групп, в котором каждая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу (которую обозначают через $G^{\mathcal{F}}$), фактор-группа по которой также принадлежит $\mathcal{F}$. Формация $\mathcal{F}$ называется насыщенной, если для каждой группы $G \in \mathcal{F}$ имеет место $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$. Ввиду определения и леммы 1(4) следующие два результата являются следствиями лемм 2.11 и 2.12 в [7] соответственно.

Лемма 4. *Пусть N — элементарная абелева нормальная p-подгруппа группы G. Предположим, что в группе N имеется такая подгруппа D, что $1 < |D| < |N|$ и каждая подгруппа из N, порядок которой равен порядку подгруппы D, хорошо Q-вложена в G. Тогда некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G.*

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, G — группа с разрешимым $\mathcal{F}$-корадикалом $P = G^{\mathcal{F}}$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая P, принадлежит $\mathcal{F}$. Тогда P — p-группа для некоторого простого числа p и если каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и P — неабелева группа) хорошо Q-вложена в G, тогда $|P/\Phi(P)| = p$.*

Лемма 6 [7]. *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Если E — циклическая подгруппа, то $G \in \mathcal{F}$.*

Для доказательства основного результата нам также понадобится следующий фрагмент из доказательства теоремы 1 в работе [6].

Лемма 7. *Пусть $V = A \times B$ — подгруппа порядка 4 группы G такая, что $|A| = |B| = 2$ и A, V s-квазинормальны в G. Тогда подгруппа B s-квазинормальна в G.*

Доказательство. Поскольку согласно лемме 1(9) для каждого $2'$-элемента y группы G имеем $y \in C_G(A)$ и $y \in N_G(A \times B)$, то $y \in C_G(B)$. Следовательно, B s-квазинормальна в G.

3. Доказательство теоремы

Предположим, что теорема не верна и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G||E|$ минимально.

(1) $O_{p'}(E) = 1$.

Предположим, что $Y = O_{p'}(E) \neq 1$. В силу леммы 3(4) условия теоремы справедливы для фактор-группы G/Y (относительно E/Y). По выбору (G, E) заключаем, что G/Y — p-нильпотентная группа, а значит, и G p-нильпотентна; противоречие.

(2) *Либо $E = G$, либо $E = P$.*

Предположим, что $P \neq E \neq G$. Тогда согласно лемме 3(3) условия теоремы справедливы для группы E (относительно E) и по выбору (G, E) заключаем, что E p-нильпотентна. Но ввиду (1) $O_{p'}(E) = 1$. Следовательно $E = P$; противоречие.

(3) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_{p'}(G) \neq 1$. Тогда ввиду (1) и (2) $E = P$. Согласно лемме 3(4) условия теоремы справедливы для фактор-группы G/V (относительно EV/V) и по выбору (G, E) заключаем, что G/V p-нильпотентна, а значит, и G — p-нильпотентная группа; противоречие.

(4) $|D| > p$.

Предположим, что $|D| = p$. Прежде покажем, что G не содержит p-замкнутой подгруппы Шмидта $H = [H_p]H_q$, где $H_p \leq E$. Действительно, в противном случае, согласно лемме 3(3) каждая подгруппа из H порядка p и порядка 4 (если H_p – неабелева 2-группа) хорошо Q-вложена в H. Тогда ввиду леммы 5 $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, что противоречит минимальности p.

Предположим теперь, что $E = G$. Согласно (1) группа G не p-нильпотентна и, значит, содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта [2, 13, 5.4]; противоречие. Следовательно, $E = P$ ввиду (2). Пусть $L = G^{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — насыщенная формация всех p-нильпотентных групп, и $\Phi = \Phi(L)$. Понятно, что $L \leq E$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, которая не содержит L. Тогда фактор-группа $G/E \simeq M/M \cap E$ p-нильпотентна и условия теоремы справедливы для группы M (относительно $M \cap E$). Следовательно, по выбору (G, E) заключаем, что M p-нильпотентна и поэтому согласно лемме 5 $|L/\Phi| = p$. Значит, ввиду леммы 6, фактор-группа G/Φ p-нильпотентна. Но тогда $L \leq \Phi$ и поэтому $L = \Phi$; противоречие. Таким образом, $|D| > p$.

(5) *Предположим, что $|P : D| > p$. Тогда G не содержит такую нормальную максимальную подгруппу M, что $|G : M| = p$ и $G = MP$.*

Действительно, в противном случае, поскольку $|P : D| > p$, то ввиду леммы 3(3) условия теоремы справедливы для группы G (относительно подгруппы $E \cap M$). Но тогда $|G||E \cap M| < |G||E|$, что противоречит выбору (G, E). Следовательно, имеем (5).

(6) *Предположим, что $|P : D| > p$. Тогда каждая подгруппа из P порядка, равного порядку подгруппы D, s-квазинормальна в G.*

Предположим, что P содержит подгруппу H такую, что $|H| = |D|$ и H не s-квазинормальна в G. Тогда ввиду леммы 3(5) группа G содержит такую нормальную подгруппу M, что $HM = G$ и $|G : M| = p$, что противоречит (5). Следовательно, каждая подгруппа из P порядка, равного порядку подгруппы D, s-квазинормальна в G.

(7) *Для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в P, имеет место $|N| \leq |D|$.*

Предположим, что $|D| < |N|$. Тогда согласно лемме 4 некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G, что невозможно ввиду минимальности N. Таким образом, имеем (7).

(8) *P является силовской подгруппой группы G.*

Если $E = G$, то утверждение очевидно. Поэтому ввиду (2) можем полагать, что $E = P$. Пусть G_p – силовская p-подгруппа в G и Q — силовская q-подгруппа в G, где $q \neq p$. Предположим, что $P \neq G_p$. Тогда $|PQ| < |G|$ и согласно лемме 3(3) условия теоремы справедливы для группы PQ (относительно P). Следовательно, по выбору (G, E) заключаем, что PQ нильпотентна и поэтому $Q \leq C_G(P)$. Пусть теперь $1 = P_0 \leq P_1 \leq \ldots \leq P_t = P$, где P_{i+1}/P_i — главный фактор в G_p, $i = 0, 1, \ldots, t-1$. Тогда P_{i+1}/P_i является главным фактором в G и поэтому $P \leq Z_\infty(G)$. Но поскольку фактор-группа $G/P = G/E$ p-нильпотентна, то группа G p-нильпотентна, что противоречит выбору G. Следовательно, $P = G_p$.

(9) *Если P — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$, то $|D| > 4$.*

Так как P — неабелева 2-группа, она содержит циклическую подгруппу $H = \langle x \rangle$ порядка 4. Допустим, что $|D| = 4$. Тогда согласно (6) H s-квазинормальна в G. Так как $\langle x^2 \rangle$ — характеристическая в H подгруппа, то $O^p(G) \leq N_G(\langle x^2 \rangle)$. Поэтому $\langle x^2 \rangle$ s-квазинормальна в G ввиду леммы 2. Заметим теперь, что если G имеет подгруппу $V = A \times B$ порядка 4, где $|A| = 2$ и A s-квазинормальна в G, тогда согласно лемме 7 V и B также s-квазинормальны в G. Значит, некоторая подгруппа Z в $Z(P)$ порядка $|Z| = 2$ s-квазинормальна в G, а значит, и каждая подгруппа из P порядка 2 s-квазинормальна в G согласно лемме 7, что противоречит (4).

(10) *Если N — абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в E, тогда условия теоремы справедливы для G/N (относительно E/N).*

Если либо $p > 2$ и $|N| < |D|$, либо $p = 2$ и $|N| < 2|D|$, либо $|P : D| = p$, то утверждение очевидно. Пусть $|P : D| > p$ и либо $p > 2$ и $|N| = |D|$, либо $p = 2$ и $|N| \in \{|D|, |D|/2\}$. Тогда согласно (6) каждая подгруппа из P порядка, равного порядку подгруппы D, s-квазинормальна в G. Кроме того, ввиду (4) $|D| > p$. Предположим, что $|N| = |D|$. Тогда подгруппа N нециклична и, следовательно, каждая подгруппа из G, которая содержит N, также нециклична. Пусть $N \leq K \leq P$, где $|K : N| = p$. Так как K нециклична, то она содержит такую максимальную подгруппу, что $L \neq N$. Тогда $K = LN$ s-квазинормальна в G, поскольку это произведение двух s-квазинормальных в G подгрупп. Таким образом, если фактор-группа P/N абелева, то ввиду леммы 3(2) условия теоремы справедливы для G/N (относительно E/N). Предположим теперь, что P/N — неабелева 2-группа. Тогда группа P неабелева и поэтому $|D| > 4$, ввиду (9). Пусть $N \leq K \leq V$, где $|V : N| = 4$ и $|V : K| = 2$. Пусть K_1 — максимальная подгруппа в V такая, что $V = K_1K$. Допустим, что K_1 циклична. Тогда $N \not\subseteq K_1$, значит, $V = K_1N$ и поэтому $|N| = 4$. Но тогда $|D| = 4$; противоречие. Следовательно, K_1 — нециклическая группа и аналогично получаем, что K_1 s-квазинормальна в G. Таким образом, снова ввиду леммы 3(2) условия теоремы справедливы для фактор-группы G/N (относительно E/N).

Предположим теперь, что $|D| = 2|N|$. Если $|N| > 2$, тогда, как и выше, можно показать, что каждая циклическая подгруппа из P/N порядка 2 и порядка 4 (если P/N — неабелева группа) хорошо Q-вложена в G/N. Допустим, что $|N| = 2$ и P/N — небелева группа. Тогда группа P неабелева и $|D| = 4$, что противоречит (9). Следовательно, имеем (10).

(11) $E = G$.

Предположим, что $E = P$ и пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G, которая содержится в E. Тогда ввиду (10) условия теоремы справедливы для фактор-группы G/N (относительно E/N). Следовательно, по выбору (G, E) заключаем, что G/N p-нильпотентна и поэтому $N \not\subseteq \Phi(G)$. Следовательно, ввиду (3) N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Покажем, что $N = O_p(G)$. Действительно, пусть M — максимальная подгруппа группы G, такая что $G = [N]M$. Тогда $O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M)$. Поскольку $O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N)$, то $O_p(G) \cap M$ является нормальной подгруппой в G и поэтому $O_p(G) \cap M = 1$. Следовательно, $N = O_p(G) = P$, ввиду (8). Но согласно лемме 4 это невозможно, так как P — минимальная нормальная подгруппа в G. Таким образом, имеем (11).

(12) *Группа G p-разрешима.*

Согласно (10), необходимо только показать, что $P_G \neq 1$. Предположим, что $P_G = 1$. Тогда ввиду леммы 1(2)(4) каждая неединичная подгруппа из P не является s-квазинормальной в G и поэтому ввиду (6) можем полагать, что $|P : D| = p$. Пусть V — максимальная подгруппа из P. По условию V хорошо Q-вложена в G. Пусть T — квазинормальная подгруппа в G такая, что $VT = G$ и $T \cap V \leq V_{sG}$. Поскольку $V_{sG} = 1$, то V имеет субнормальное дополнение T в G по лемме 1(4). Тогда $T_{p'}$ является субнормальной подгруппой в G. Но $T_{p'} = G_{p'}$ — холловская p'-подгруппа группы G и поэтому ввиду леммы 1(1) G p-нильпотентна, что противоречит выбору группы G. Таким образом, имеем (12).

Заключительное противоречие.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду (1), (11) и (12) $N \leq P$. Следовательно, ввиду (10) и по выбору (G, E) заключаем, что фактор-группа G/N p-нильпотентна. Таким образом, $N \not\subseteq \Phi(G)$ и $N = O_p(G) = F(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Предположим вначале, что $|P : D| = p$. Пусть V — максимальная подгруппа из P такая, что $N \not\leq V$. По условию V хорошо Q-вложена в G. Пусть $L = V_{sG}$ и T — квазинормальная подгруппа в G такая, что $VT = G$ и $T \cap V \leq L$. Согласно лемме 1(2)(4) $L \leq O_p(G) = N$. Следовательно, $L \leq N \cap V$. Так как ввиду леммы 1(4) T субнормальна в G, то $N \leq O^p(G) \leq T$ согласно [5, f]. Тогда $T \cap V \leq N \cap V \leq T \cap V$ и поэтому $T \cap V = N \cap V$. Таким образом, поскольку $T \cap V \leq L \leq N \cap V$, то $T \cap V = L$. Ясно, что $N \cap V$ — нормальная подгруппа в P. С другой стороны, $L = N \cap V$ s-квазинормальна в G и поэтому для каждой силовской q-подгруппы Q из G имеем $Q \leq N_G(L)$, согласно лемме 1(3)(9). Следовательно, L — неединичная подгруппа из P, которая нормальна в G и, значит, $N \leq L \leq V$; противоречие.

Предположим теперь, что $|P : D| > p$. Тогда ввиду (6) каждая подгруппа из P порядка, равного порядку подгруппы D, s-квазинормальна в G. Поскольку согласно лемме 1(2)(4) каждая s-квазинормальная в G подгруппа из P содержится в $O_p(G) = N$, то $P = N$. Но это невозможно ввиду леммы 4, поскольку P — минимальная нормальная подгруппа в G. Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Таким образом, получена новая характеристика p-нильпотентности конечных групп в терминах хорошо Q-вложенных подгрупп. Доказанная в данной работе теорема может быть использована для получения новых характеризаций p-разрешимых и p-нильпотентных групп.

Abstract. Let G be a finite group and H a subgroup of G. Let H_{sG} be the sub-group of H generated by all those subgroups of H which are s-quasinormal in G. Then we say that: *H is well Q-embedded in G* if G has a quasinormal subgroup T such that $T \cap H \leq H_{sG}$ and $G = HT$. Our main result here is the following theo-rem: *Let G be a group with a normal subgroup E such that G/E is p-nilpotent and p is the smallest prime divisor of $|G|$. Suppose that Sylow p-subgroup P of E has a subgroup D such that $1 < |D| < |P|$ and every subgroups H of P with order $|H| = |D|$ and every cyclic subgroups of P with order 4 (if $|D| = 2$ and P is a non-abelian 2-group) are well Q-embedded in G. Then G is p-nilpotent.*

Литература

1. *Doerk, K. Finite Soluble Groups / K.Doerk, T.Hawkes; Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.*
2. *Huppert, B. Endliche Gruppen I / B.Huppert; Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.*
3. *Kegel, O. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.Kegel // Math. Z. — 1962. — V. 78. — P. 205–221.*
4. *Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O.Ore // Duke Math. J. — 1939. — V. 5. — P. 431–460.*
5. *Schmid, P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P.Schmid // J. Algebra. — 1998. — V. 207. — P. 285–293.*
6. *Sergienko, V.I. A criterion for the p-solubility of finite groups, / V.I.Sergienko // Mat. Zam. — 1971. — Vol. 9. — P. 216–220.*
7. *Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroup of finite groups / A.N.Skiba // J. Algebra. — 2007. — V. 315. — P. 192–209.*
8. *Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E.Stonehewer // Math. Z. — 1972. — V. 125. — P. 1–16.*
9. *Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups / H.Wielandt; Lectures given at the Ohio State University, Columbus. Ohio, 1971.*

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.09.08