Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(50), Ч1, 2008

*УДК 517.5*

# Об эквивалентной структурной характеристике сложного процесса, моделируемого алгебраическими многочленами

Г. Н. Казимиров

Будем полагать, что модель процесса $f(t)$ известна, но является сложной для исследования либо не удовлетворяет нас по каким-то причинам. Требуется подобрать другую, более простую функцию вместо $f(t)$, достаточно близкую к исходной (см.[1]).

В настоящей работе рассматривается эквивалентная характеристика функций $f$, для которых можно подобрать более простые функции $P_n$ (алгебраические многочлены степени не выше чем $n$-1), близкие в некотором смысле к исходным (см. [2]).

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция $f$ измерима на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\|_p = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция $f$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1\le x\le 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим множество таких функций $f$, что $f(x)(1-x^2)^\alpha \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha} = \left\| f(x)(1-x^2)^\alpha \right\|_p$.

Для $\nu > (-1/2)$ определим оператор обобщённого сдвига Якоби $T_h(f,x,\nu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int\limits_{-1}^{1} f(x\cosh + y\sinh\sqrt{1-x^2})(1-y^2)^{\nu-(1/2)} dy$, где $\gamma(\nu) = \int\limits_{-1}^{1} (1-y^2)^{\nu-(1/2)} dy$.

Введём обозначения ($r = 2,3,\ldots$):

$$\Delta_h^1(f,x,\nu) = T_h(f,x,\nu) - f(x),\ \ \Delta_{h_1,\ldots,h_r}^r(f,x,\nu) = \Delta_{h_r}^1(\Delta_{h_1,\ldots,h_{r-1}}^{r-1}(f,x,\nu),x,\nu),$$

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} = \sup_{|h_i|\le\delta, i=1,\ldots,r} \left\| \Delta_{h_1,\ldots,h_r}^r(f,x,\mu) \right\|_{p,\alpha},$$

$$D_{x,\nu} = (1-x^2)^{-\nu} \frac{d}{dx}(1-x^2)^{\nu+1}\frac{d}{dx},$$

$D_{x,\nu}^0 = I$, где $I$ – тождественный оператор, $D_{x,\nu}^1 = D_{x,\nu}$ и для $k$=2,3,… $D_{x,\nu}^k = D_{x,\nu}^1(D_{x,\nu}^{k-1})$. Через $AD^r(\nu)_{p,\alpha}$ обозначим множество таких функций g, что g имеет абсолютно непрерывную на каждом [a,b]⊂(-1,1) 2r-1 производную и $D_{x,\nu}^l g \in L_{p,\alpha}$ для $l$=0,1,2,…,r.

Для $f \in L_{p,\alpha}$ и числа $\nu \ge \alpha > -(1/2)$ введём К-функционал Петре по формуле:

$$K_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} = \inf_{g\in AD^r(\nu)_{p,\alpha}} \{\|f-g\|_{p,\alpha} + \delta^{2r}\left\|D_{x,\nu}^r g(x)\right\|_{p,\alpha}\}.$$

Цель работы – доказать следующую теорему.

**Теорема.** Пусть даны числа $p,\nu,r$ такие, что $1 \le p \le \infty$, $\nu > -(1/2)$, $r = 1,2,3,\ldots$ . Пусть число α выбрано по правилу: -(1/2)<α≤ν при $p$=1, $-(1/2p) < \alpha < \nu + (1/2) - (1/2p)$ при $1<p<\infty$, 0≤α<ν+(1/2) при $p=\infty$. Тогда для $f\in L_{p,\alpha}$ справедливы неравенства: $C_1\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha}\le K_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha}\le C_2\tilde{\omega}(f,\delta,\nu)_{p,\alpha}$, где положительные постоянные $C_1$ и $C_2$ не зависят от $f$ и $\delta$.

Доказательству теоремы предпошлём несколько лемм.

**Лемма 1.** Пусть даны числа $p,\nu$ такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2)$. Пусть число α выбрано по правилу: -(1/2)<α≤ν при $p$=1, -(1/2$p$)<$\alpha$<$\nu$+(1/2)-(1/2$p$) при 1<$p$<∞, 0≤α<ν+(1/2) при $p=\infty$. Тогда если $f\in L_{p,\alpha}$ то и $T_t(f,x,\nu)\in L_{p,\alpha}$ и $\| T_t(f,x,\nu) \|_{p,\alpha}\le C_3\|f\|_{p,\alpha}$, где положительная постоянная $C_6$ не зависит от $f$ и $t$.

Лемма 1 доказана в [4].

**Лемма 2.** Пусть даны числа $p,\nu,l$ такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2), l=1,2,3,\ldots$. Пусть число α выбрано по правилу: -(1/2)<α≤ν при $p$=1, -(1/2$p$)<$\alpha$<$\nu$+(1/2)-(1/2$p$) при 1<$p$<∞, 0≤α<ν+(1/2) при $p=\infty$. Тогда для $g\in AD^r(\nu)_{p,\alpha}$ и $\delta\in[0,\pi]$ справедливо неравенство:

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha}\le C_4\delta^{2r}\left\|D^r_{x,\nu}g(x)\right\|_{p,\alpha},$$

где положительная постоянная $C_4$ не зависит от g и $\delta$.

Для $0\le h\le\frac{\pi}{2}$ рассмотрим оператор

$$L_h(f,x,\nu)==\frac{1}{\phi(h)}\int_0^h(\sin\omega)^{-2\nu-1}\int_0^\omega(\sin u)^{2\nu+1}T_u(f,x,\nu)du\,d\omega,$$

где $\phi(h)=\int_0^h(\sin\omega)^{-2\nu-1}\int_0^\omega(\sin u)^{2\nu+1}du\,d\omega$

Пусть $L_h^1(f,x,\nu)=L_h(f,x,\nu)$, а для $k$=2,3,… $L^l_{h_1,\ldots,h_l}(f,x,\nu)=L_{h_l}(L^{l-1}_{h_1,\ldots,h_{l-1}}(f,x,\nu),x,\nu)$.

**Лемма 3.** Пусть даны числа $p,\nu$ такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2)$. Пусть число α выбрано по правилу: -(1/2)<α≤ν при $p$=1, -(1/2$p$)<$\alpha$<$\nu$+(1/2)-(1/2$p$) при 1<$p$<∞, 0≤α<ν+(1/2) при $p=\infty$. Тогда если $f\in L_{p,\alpha}$ то для любого $k\in\mathrm{N}$ $L_h^k(f,x,\nu)\in AD^k(\nu)_{p,\alpha}$.

Лемма 2 и 3 доказаны в [5].

**Лемма 4.** Пусть $g\in AD^k(\nu)_{1,\nu}, \nu>-(1/2)$. Тогда для почти всех $x\in[-1,1]$ и всех $t_1,\ldots,t_l\in R, k=1,2,3,\ldots; l=1,2,3,\ldots$ справедливо равенство:

$$D^k_{x,\nu}T^l_{t_1,\ldots,t_l}(g,x,\nu)=T^l_{t_1,\ldots,t_l}(D^k_{x,\nu}g,x,\nu)$$

Лемма 4 доказана в [5], стр.26.

**Лемма 5.** Если $f\in L_{1,\nu}$, где $\nu>-(1/2)$, то для любого $k\in\mathrm{N}$ справедливо равенство: $D^k_{x,\nu}L^k_h(f,x,\nu)=\frac{1}{(\phi(h))^k}\Delta^k_h(f,x,\nu)$.

Лемма 5 доказана в [5], стр.50.

**Лемма 6.** Если $f\in L_{1,\nu}$, где $\nu>-(1/2)$, то для почти всех $x\in[-1,1]$ и для любых $t_1,t_2\in R$ справедливо равенство: $T^2_{t_1,t_2}(f,x,\nu)=T^2_{t_2,t_1}(f,x,\nu)$.

Лемма 5 доказана в [5], стр.32.

**Доказательство теоремы:** Используя лемму 1 и лемму 2, имеем для $g \in AD^r(\nu)_{p,\alpha}$

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} \le \tilde{\omega}(f-g,\delta,\nu)+\tilde{\omega}(g,\delta,\nu) \le C_5\|f-g\|_{p,\alpha}+C_6\delta^{2r}\left\|D^r_{x,\nu}g(x)\right\|_{p,\alpha},$$

где $C_5$ и $C_6$ не зависят от f, g и $\delta$.

Переходя к точной верхней грани по $g \in AD^r(\nu)_{p,\alpha}$, получим:

$$C_1\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} \le K_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha}.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию

$A^r_h(f,x,\nu) = E-(E-L^r_h)^r(f,x,\nu)$, где $E(f,x,\nu)=f(x)$.

Из леммы 3 следует, что $L^k_h(f,x,\nu) \in AD^k(\nu)_{p,\alpha}$. Нетрудно проверить, что $AD^l(\nu)_{p,\alpha} \subset AD^r(\nu)_{p,\alpha}$ при $l \ge r \ge 1, l=r,r+1,...$ . Поэтому $A^r_h(f,x,\nu) \in AD^r(\nu)_{p,\alpha}$. Так как $L^r_h$ имеет абсолютно непрерывную производную на каждом $[a,b] \subset (-1,1)$, то применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, Лемму 4 , обобщённое неравенство Минковского и Лемму 1, имеем для $l = 2,3...$

$$\| D^r_{x,\nu}(L^r_h)^l(f,x,\nu) \|_{p,\alpha} \le \frac{1}{\phi(h)}\int_0^h(\sin w)^{-2\nu-1}\int_0^\omega(\sin w)^{2\nu+1}\left\|T_u(D^r_{x,\nu}(L^{rl-1}_h(f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha}dudw \le$$

$$\le C_7\| D^r_{x,\nu}L^{rl-1}_h(f,x,\nu) \|_{p,\alpha} \le ... \le C_8\| D^r_{x,\nu}L^r_h(f,x,\nu) \|_{p,\alpha}.$$

Так как $A^r_h(f,x,\nu)$ представляет собой сумму произведений $L^r_h(f,x,\nu)$, то $\| D^r_{x,\nu}A^r_h(f,x,\nu) \|_{p,\alpha} \le C_9\left\|D^r_{x,\nu}L^r_h(f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha}$.

Применяя лемму 5 и учитывая, что $\phi(h) \ge C_{10}\frac{h^2}{2}$, имеем

$$h^{2r}\| D^r_{x,\nu}A^r_h(f,x,\nu) \|_{p,\alpha} = \frac{h^{2r}}{(\phi(h))^r}(\phi(h))^r\left\|D^r_{x,\nu}A^r_h(f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha} \le C_{11}\left\|\Delta^r_h(f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha} \le$$

$$\le C_{12}\sup_{|t|\le h}\left\|\Delta^r_t(f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha} \le C_{13}\tilde{\omega}_r(f,h,\nu)_{p,\alpha}$$

С другой стороны, так как $E-L^r_h=(E-L_h)(E+L_h+...+L^{r-1}_h)$, то из определения $L_h(f,x,\nu)$, обобщённого неравенства Минковского и Леммы 1следует, что

при $0 \le h \le \frac{\pi}{2}$ $\quad \|L_h(f,x,\nu)\|_{p,\alpha} \le C_{14}\|f\|_{p,\alpha}$.

Поэтому $\| (E-L^r_h)(g,x,\nu) \|_{p,\alpha} \le C_{15}\left\|(E-L_h)(g,x.\nu)\right\| \le \sup_{0\le u\le h}\left\|\Delta_u(g,x,\nu)\right\|_{p,\alpha}$ (1)

Из леммы 6 следует, что $T_t(L_h(f,x,\nu),x,\nu)=L_h(T_t(f,x,\nu),x,\nu)$. Поэтому из неравенства (1) следует, что $\| f(x)-A^r_h(f,x,\nu) \|_{p,\alpha} \le$

$$\le C_{16}\sup_{0\le u_1\le h}\sup_{0\le u_2\le h}...\sup_{0\le u_r\le h}\left\|\Delta^r_{u_1,u_2,...,u_r}(f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha} \le C_{17}\tilde{\omega}_r(f,h,\nu)_{p,\alpha}.$$

Таким образом для $0 \le h \le \frac{\pi}{2}$ $K_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} \le C_{18}\tilde{\omega}(f,\delta,\nu)_{p,\alpha}$.

Пусть $I_h = \left\| f - A_1^r(f,x,\nu) \right\|_{p,\alpha} + h^{2r} \left\| D_{x,\nu}^r A_1^r(f,x,\nu) \right\|_{p,\alpha} \}$. По доказанному выше для

$$0 \le h \le \frac{\pi}{2} \quad I_h \le C_{19}\tilde{\omega}(f,1,\nu)_{p,\alpha} \text{ и для } \frac{\pi}{2} \le h \le \pi$$

$I_h \le C_{20} I_1 \le C_{21}\tilde{\omega}(f,1,\nu)_{p,\alpha} \le C_{22}\tilde{\omega}_r(f,h,\nu)_{p,\alpha}$. Итак для любого $\delta \in [0,\pi]$ $K_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} \le C_{23}\tilde{\omega}(f,\delta,\nu)_{p,\alpha}$. Теорема полностью доказана.

**Abstract**. Equivalent structural characteristics of a complicated process simulated by algebraic polynomials are considered in the paper.

## Литература

1. Кузнецов, В.П. Экономико-математические методы и модели: Конспект лекций / В.П. Кузнецов. – Мн.: МИУ, 2000. – 131с.:ил.

2. Казимиров, Г.Н. Об одном подходе к упрощению модели сложного процесса на основе алгеброических многочленов / Г.Н.Казимиров // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – №6(15). – 2002. – С. 171-174.

3. Потапов, М.К. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения / М.К. Потапов // Труды МИАН СССР, Том 134, 1975, С. 260-277.

4. Казимиров, Г.Н. Приближение алгебраическими многочленами функций с данным *k*-м обобщённым модулем гладкости. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Г.Н. Казимиров; Москва,1995.-106с.

Гомельский государственный
университет имени Ф.Скорины

Поступило 12.05.08