Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(55), Ч2, 2009

Математика

УДК 512.542

Формации Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$

И. Н. Халимончик

Введение. Рассмотрение задач перечисления формаций конечных групп с заданными свойствами привело к проблеме описания насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, для которых любая конечная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Впервые такая проблема была поставлена в начале 80-х годов Л.А. Шеметковым и сформулирована им в явном виде в 1984 году на IX Всесоюзном симпозиуме по теории групп в Москве. В дальнейшем, эта проблема была записана им в Коуровскую тетрадь [1], вопрос 9.74. В классе конечных разрешимых групп эта проблема была решена А.Ф. Васильевым и В.Н. Семенчуком [2]. Этот результат вошел в монографии [3-6]. Исследованию формаций с данным свойством были посвящены работы А.Н. Скибы [7], С.Ф. Каморникова [8], Баллестера-Болинше и Перец-Рамош [9-10], Го Вэньбиня [11], Баллестера-Болинше [12] и др. В настоящее время такие формации, называемые формациями Шеметкова (кратко, $\check{S}$-формациями), широко используются при решении различных задач перечисления формаций по заданным свойствам, см. [3-6]. В монографии [5] было предложено следующее расширение понятия $\check{S}$-формации. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс конечных групп. Формация $\mathfrak{F}$ конечных групп называется формацией Шеметкова или $\check{S}$-формацией в классе $\mathfrak{X}$, если каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа из $\mathfrak{X}$ является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. В [5] было получено описание $\check{S}$-формаций в классе $\mathfrak{X}$ в случае, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{X})}\mathfrak{X}$.

В настоящей работе мы приводим конструктивное описание наследственных локальных $\check{S}$-формаций $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{X}$ при предположении, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — наследственная локальная формация конечных разрешимых групп.

2. Предварительные сведения. Рассматриваются только конечные разрешимые группы. В работе используются обозначения и определения из [13-14].

Напомним некоторые необходимые определения и результаты.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Группа G называется минимальной не $\mathfrak{X}$-группой, если G не принадлежит $\mathfrak{X}$, а все собственные подгруппы из G принадлежат $\mathfrak{X}$. Через $M(\mathfrak{X})$ будем обозначать класс всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп. В частности, группа Шмидта — это минимальная не $\mathfrak{N}$-группа.

Лемма 2.1 [15]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация и h — ее максимальный внутренний локальный экран. Группа G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $\Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) = F(G)$;

2) $G/\Phi(G) = [G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)]M/\Phi(G)$, где $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа, а $M/\Phi(G)$ — максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$, причем $M/\Phi(G)$ является минимальной не $h(p)$-группой, где $p \in \pi(G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G))$.

Нам понадобятся некоторые свойства групп Шмидта, перечисленные в следующей лемме.

Лемма 2.2 [13]. *Пусть G — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) G — разрешимая бипримарная группа;

2) $G^{\mathfrak{N}}$ является силовской p-подгруппой в G, p — простое число;

3) $G/G^{\mathfrak{N}}$ — циклическая q-группа, q — простое число;

4) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор группы G, причем если $| G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G)(G^{\mathfrak{N}}) |= p^b$, то $p^b \equiv 1(mod\ q)$ и b есть показатель числа p по модулю q;

5) если $Q =< a >$ — силовская q-подгруппа из G, то $a^q \in Z(G)$;

6) если $G^{\mathfrak{N}}$ абелева, то $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Множество всех ее локальных экранов Ω можно считать частично упорядоченным с отношением $\leq$, которое задается следующим образом: для $f_1, f_2 \in \Omega$ выполняется $f_1 \leq f_2$, если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого простого p.

Локальный экран f формации $\mathfrak{F}$ называется внутренним, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого простого p. Внутренний локальный экран f формации $\mathfrak{F}$ являющийся максимальным элементом множества всех внутренних локальных экранов формации $\mathfrak{F}$ называется максимальным внутренним локальным экраном $\mathfrak{F}$. По теореме 3.3 из [13] локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран h, причем $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ для любого простого p.

Наследственный локальный экран f наследственной формации $\mathfrak{F}$, являющийся максимальным элементом множества всех наследственных локальных экранов формации $\mathfrak{F}$ называется максимальным наследственным локальным экраном $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ — произвольный класс групп, то $\mathfrak{X}^S$ — это наибольший (по включению) наследственный подкласс класса $\mathfrak{X}$, то есть $\mathfrak{X}^S = \{G \mid$ все подгруппы группы G входят в $\mathfrak{X}\}$.

Класс $\mathfrak{X}^S$ является формацией, если $\mathfrak{X}$ — формация, см. [13, лемма 25.4].

Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-проектором группы G, если HN/N — $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа группы G/N для любой нормальной подгруппы N группы G.

Если $\mathfrak{X}$ — формация, а $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то согласно [14, с.333] класс $\mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X}$ определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда каждый $\mathfrak{F}$-проектор группы G принадлежит $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$, то $\mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X} = \varnothing$.

Лемма 2.3 [13]. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Лемма 2.4 [16]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация и h — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) h является единственным максимальным внутренним наследственным локальным экраном формации $\mathfrak{F}$;

2) формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный наследственный локальный экран φ такой, что $\varphi(p) = (\mathfrak{F} \downarrow h(p))^S$ и $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p\varphi(p)$ для каждого простого p;

3) $M(\varphi(p)) \subseteq M(h(p)) \cap \mathfrak{F}$ для любого простого p.

Если f и x — локальные экраны, то экран f называется x-экраном, если $f(p) \subseteq x(p)$ для любого простого p.

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — наследственные локальные формации, f и x — их максимальные наследственные локальные экраны соответственно и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный наследственный локальный x-экран t такой, что $t(p) = f(p) \cap x(p)$ для любого простого p.*

Доказательство. Пусть t — такой локальный экран, что $t(p) = f(p) \cap x(p)$ для любого простого p. Нетрудно видеть, что t — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если t_1

— произвольный наследственный локальный x-экран формации $\mathfrak{F}$, то $t_1 \leq f$ в силу свойств экрана f. Так как t_1 — x-экран, то $t_1 \leq t$. Лемма доказана.

Лемма 2.6 [14, B, 10.7]. *Если абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G попарно неизоморфны как G-модули, то G имеет точное неприводимое представление над любым полем, чья характеристика либо равно нулю, либо не делит $|F(G)|$.*

3. Основной результат

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{X}$ — локальная наследственная формация, x — ее максимальный наследственный локальный экран и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F}$ имеет локальный экран f такой, что*

1) $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$, для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = \varnothing$ для любого $p \in \pi'(\mathfrak{F})$;

3) $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p,

то $\mathfrak{F}$ является формацией Шеметкова в $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{F}$ имеет локальный экран f, удовлетворяющий условиям 1)–3) леммы 3.1. Пусть G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$. Если G нильпотентна, то $G = G_{p_1} \times ... \times G_{p_n}$, где G_{p_i} – силовская p_i-подгруппа в G. Если $n > 1$, то $G_{p_i} \in \mathfrak{F}$ для любого i. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие с выбором G. Значит, G – p-группа, где p — некоторое простое число. Если в G имеется собственная подгруппа P простого порядка, то $P \in \mathfrak{F}$. Из локальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, G является группой простого порядка.

Пусть G — ненильпотентная группа. Покажем, что тогда она является группой Шмидта. Предположим, что $\Phi(G) = 1$. По 2) леммы 2.1 $G = [G^{\mathfrak{F}}]M$, где $G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, а подгруппа M является минимальной не $h(p)$-группой, где $p \in \pi(G^{\mathfrak{F}})$ и h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что M не принадлежит формации $f(p)$. Поэтому M является минимальной $f(p)$-группой. Так как $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$, то нетрудно получить, что M является группой простого порядка q, где $q \neq p$. Следовательно, G — группа Шмидта.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Так как $G/\Phi(G)$ — группа Шмидта, то по 2) леммы 2.2 в $G/\Phi(G)$ имеется нормальная силовская p-подгруппа $H/\Phi(G)$ для некоторого простого p. Пусть P — силовская p-подгруппа из H. Тогда P — силовская p-подгруппа в G и $H = P\Phi(G)$. Так как H нормальна в G, то по лемме Фраттини подгруппа P нормальна в G. Теперь по 1) теоремы 24.5 из [13, с. 235] получаем, что $P = G^{\mathfrak{F}}$. Тогда, G — p-замкнутая $\{p, q\}$-группа, где q — простое число, отличное от p. Отметим, что $f(p) \neq \varnothing$ и $f(q) \neq \varnothing$.

Пусть M — собственная подгруппа из G. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то по лемме 2.3 $M/F_p(M) \in f(p)$. Если $M/F_p(M) \neq 1$, то $M/F_p(M)$ — q-группа. Но тогда $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Отсюда и из $G/F_p(G) \in x(p)$ следует, что $G/F_p(G) \in f(p)$. Так как G является p-замкнутой группой, то $F_q(G) = G$. Тогда $G/F_q(G) \in f(q)$. Теперь по лемме 2.3 получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $M/F_p(M) = 1$. А это значит, что $M = F_p(M) = F_q(M)$ и подгруппа M нильпотентна. Итак, G — группа Шмидта. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран, $\mathfrak{X}$ — наследственная локальная формация, x — ее максимальный наследственный локальный экран и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{F}$ тогда* *и только тогда является формацией Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$, когда ее максимальный наследственный локальный x-экран f удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = \varnothing$ для любого $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ является $\check{S}$-формацией в классе $\mathfrak{X}$, h — ее максимальный внутренний локальный экран. Рассмотрим максимальный наследственный локальный x-экран f формации $\mathfrak{F}$, который существует и единственен по лемме 2.5. Заметим, что $f(p) = (\mathfrak{F} \downarrow h(p))^S \cap x(p)$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для каждого простого p. Покажем, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Ясно, что $f(p) \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$. Предположим, что обратное включение неверно для некоторого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и G — группа минимального порядка из $(\mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)) \setminus f(p)$. Так как $\mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$ и $f(p)$ — формации, то в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа. Кроме того, G является минимальной не $f(p)$-группой. Так как $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$, то $O_p(G) = 1$. По лемме 2.6 существует точный неприводимый G-модуль U над полем F_p из p элементов. Пусть $R = [U]G$. Покажем, что R является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Так как $F_p(R) = U$ и $R/F_p(R) \notin f(p)$, то по лемме 2.3 $R \notin \mathfrak{F}$. Пусть M — максимальная подгруппа из G. Если M не содержит U, то M сопряжена с подгруппой G в R. Ввиду 3) леммы 2.4 получаем, что $G \in M(f(p)) \subseteq M(h(p)) \cap \mathfrak{F}$, а значит, $M \in \mathfrak{F}$. Пусть $U \subseteq M$. Из $M = M \cap [U]G = U(M \cap G)$ и $(M \cap G) \in h(p)$ следует, что $M \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, R — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, а значит, группа Шмидта. Из 3) леммы 2.2 следует, что G — циклическая q-группа, где q — простое число и $q \neq p$. Так как $C_R(U) = U$, то G — группа простого порядка q. Так как $G \in \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$ и $f(p)$ — наследственная формация, то $G \in f(p)$. Получили противоречие. Следовательно, $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$. Обратное утверждение следует из леммы 3.1. Теорема доказана.

Abstract. A constructive description of soluble subgroup-closed saturated Shemetkov formations $\mathfrak{F}$ in the class $\mathfrak{X}$ where $\mathfrak{X}$ is a soluble subgroup-closed saturated formation is presented in the paper.

Литература

1. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск, 1984.

2. Семенчук, В.Н. Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: тр. Гомельск. семинара — Мн.: Наука и техника, 1984.— С. 175-181.

3. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. — М.: Наука, 1989.—256 с.

4. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / Guo Wenbin. — Dordrecht - Bocton - London: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 257 p.

5. Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. — Мн.: Беларуская навука, 2003.— 254 с.

6. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro — Springer, 2006.— 385 p.

7. Скиба, А.Н. Об одном классе локальных формаций конечных групп / А.Н. Скиба // Докл. Акад. наук БССР. — 1990. — № 34. — С. 982-984.

8. Каморников, С.Ф. О двух проблемах Л.А. Шеметкова / С.Ф. Каморников, // Сибир. мат. журн. — 1994.— Т. 35, № 4.— С.801–812.

9. Ballester-Bolinches, A. On $\mathfrak{F}$-critical groups / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. — 1995. — Vol. 174. — P. 948–958.

10. Ballester-Bolinches, A. Two questions of L.A. Shemetkov on critical groups / A. Ballester-Bolinches, M. D. Perez-Ramos // J. Algebra. — 1996. — Vol. 179. — P. 905–917.

11. Guo, W. On formations with Shemetkov conditions / W. Guo, L. Zhu // Algebra Colloquium. — 2002. — Vol. 9, № 1. — P. 89-98.

12. Ballester-Bolinches, A. $\mathfrak{F}$-critical groups, $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups, and the generalised Wielandt property for residuals / A. Ballester-Bolinches // Ricerche di Matematica. — 2006. — Vol. 55. — P. 13–30.

13. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — М. Наука. 1978. — 278 с.

14. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin - New York: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

15. Семенчук, В.Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. — 1979. — Т.18, №3. — С. 348-382.

16. Васильев, А.Ф. О перечислении локальных формаций с условием Кегеля / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. —1993 — Вып. 7. — С. 86–93.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 30.06.08