Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(62), 2010

УДК 517.977

Критерий оптимальности для задачи управления с негладким критерием качества

Г. Л. Карасева

Введение. Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями относятся к классу сложнейших экстремальных задач. С результатами качественной теории таких задач можно ознакомиться в [1, 2]. В работах [3, 4] основное внимание уделено конструктивным вопросам. В данной работе рассматривается специальная задача оптимального управления с негладким критерием качества, которая может быть сведена к линейной задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями. Для неё сформулирован конструктивный критерий оптимальности.

1 Постановка задачи. В классе кусочно-непрерывных функций рассмотрим задачу:

$$\max_{t\in T}\left|d'x(t)\right| \to \min$$
$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Hx\left(t^*\right) = g, \qquad 1)$$
$$\left|u(t)\right| \le 1, \quad t \in T = \left[0, t^*\right].$$

Здесь $x = x(t) \in R^n$, $u = u(t) \in R$, A – постоянная $n\times n$ – матрица, $H \in R^{m\times n}$; $rankH = m < n$, b, d – заданные векторы соответствующих размеров.

Формально задача (1) записана без фазовых ограничений, но имеет негладкий критерий качества. Задача (1) эквивалентна задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями

$$J(\alpha,u) = -\alpha \to \max_{\alpha,u},$$
$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Hx\left(t^*\right) = g, \qquad 2)$$
$$\left|d'x(t)\right| \le \alpha, \quad \left|u(t)\right| \le 1, \quad t \in T = \left[0, t^*\right].$$

Введем обозначения: $u(\cdot) = \left(u(t), t\in T\right)$, $x(\cdot) = \left(x(t), t\in T\right)$, которые будем использовать в дальнейшем.

Определение 1 Пара $\left(\alpha, u(\cdot)\right)$ и соответствующая ей траектория $x(\cdot)$ называется допустимыми, если они удовлетворяют всем ограничениям задачи (2).

Определение 2 Оптимальными будем называть допустимую пару $\left(\alpha^0, u^0(\cdot)\right)$ и соответствующую ей траекторию $x^0(\cdot)$, на которых критерий качества $J(\alpha,u)$ задачи (2) достигает максимального значения.

Определение 3 Допустимую пару $\left(\alpha^\varepsilon, u^\varepsilon(\cdot)\right)$, для которой выполняется неравенство $J\left(\alpha^0, u^0(\cdot)\right) - J\left(\alpha^\varepsilon, u^\varepsilon(\cdot)\right) \le \varepsilon$, будем называть ε-оптимальным (субоптимальным) управлением.

Будем считать, что $d'b \ne 0$, и ограничения задачи (2) удовлетворяют условию типа Слейтера, т.е. для некоторого числа $\delta > 0$, любого $\Delta g \in R^m$, $\left\|\Delta g\right\| < \delta$, существует такое кусочно-непрерывное управление $\bar{u}(\cdot)$, что вдоль него и соответствующей ему траектории $\bar{x}(\cdot)$ выполняются соотношения:

$$\left|\bar{u}(t)\right| < 1, \quad t \in T; \quad H\bar{x}\left(t^*\right) = g + \Delta g .$$

2 Формула приращения критерия качества. Рассмотрим произвольную совокупность отрезков $T_i = \left[\tau_i, \tau^i\right]$, $\tau_i \le \tau^i < \tau_{i+1}$, $i \in N = \{1,..., p\}$; $N_* = \left\{i \in N : \tau_i < \tau^i\right\}$, $N_0 = N \setminus N_*$, $N = N^+ \cup N^-$, $N^+ \cap N^- = \varnothing$, $N_* = N_*^+ \cup N_*^-$, $N_*^+ \cap N_*^- = \varnothing$. Наряду с допустимой парой $(\alpha, u(\cdot))$ и соответствующей ей траекторией $x(\cdot)$ рассмотрим произвольную пару $(\tilde{\alpha}, \tilde{u}(\cdot))$ и соответствующую ей траекторию $\tilde{x}(\cdot)$. Обозначим:

$$\Delta\alpha = \tilde{\alpha} - \alpha, \qquad \Delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t), \tag{3}$$

$$\Delta z_1(t) = d'\Delta x(t) - \Delta\alpha, \quad t \in T, \qquad \Delta z_2(t) = d'\Delta x(t) + \Delta\alpha, \quad t \in T.$$
4)

В силу допустимости пар $(\alpha, u(\cdot))$, $(\tilde{\alpha}, \tilde{u}(\cdot))$ имеют места равенства:

$$H\,\Delta x\left(t^*\right) = 0\,,$$
5)

$$d'\Delta x(\tau_i) - \Delta\alpha = \Delta z_1(\tau_i)\,, \quad i \in N^+; \;\; d'\Delta x(\tau_i) + \Delta\alpha = \Delta z_2(\tau_i)\,, \quad i \in N^-;$$
6)

$$d'\Delta x\left(\tau^i\right) - \Delta\alpha = \Delta z_1\left(\tau^i\right), \quad i \in N_*^+; \;\; d'\Delta x\left(\tau^i\right) + \Delta\alpha = \Delta z_2\left(\tau^i\right), \quad i \in N_*^-.$$
7)

Подсчитаем приращение критерия качества:

$$\Delta J(\alpha,u) = -\Delta\alpha.$$
8)

Пусть $\mu(t),\ \eta(t),\ t \in T;\ \ y \in R^m;\ \ v_i,\ i \in N;\ \ v^i,\ i \in N_*,$ -произвольные кусочно-непрерывные функции, вектор и числа. Умножим на них соответственно соотношения (4) – (7). Результат прибавим к (8). Получим:

$$\begin{aligned}\Delta J(\alpha,u) = {} & -\Delta\alpha - y'H\Delta x\left(t^*\right) + \sum_{i\in N^+}\left(-d'\Delta x(\tau_i) + \Delta\alpha\right)v_i + \\ & + \sum_{i\in N^+}\Delta z_1(\tau_i)v_i + \sum_{\in N^-}\left(-d'\Delta x(\tau_i) - \Delta\alpha\right)v_i + \sum_{i\in N^-}\Delta z_2(\tau_i)v_i + \\ & + \sum_{i\in N_*^+}\left(-d'\Delta x\left(\tau^i\right) + \Delta\alpha\right)v^i + \sum_{i\in N_*^+}\Delta z_1\left(\tau^i\right)v^i + \sum_{i\in N_*^-}\left(-d'\Delta x\left(\tau^i\right) + \Delta\alpha\right)v^i + \\ & + \sum_{i\in N_*^-}\Delta z_2\left(\tau^i\right)v^i + \int_T\left(d'\Delta x\left(\tau^i\right) - \Delta\alpha\right)\mu(t)\,dt - \int_T \mu(t)\Delta z_1(t)\,dt + \\ & + \int_T\left(d'\Delta x\left(\tau^i\right) + \Delta\alpha\right)\eta(t)dt - \int_T \eta(t)\Delta z_2(t)dt\end{aligned} \tag{9}$$

Подставим в (9) выражение приращения траектории $\Delta x(t),\ t \in T,$ через приращения управления с помощью формулы Коши. Проинтегрируем и применим элементарные преобразования, приведем подобные и получим:

$$\begin{aligned}\Delta J(\alpha,u) = {} & \left(-1 + \sum_{i\in N^+}v_i - \sum_{i\in N^-}v_i + \sum_{i\in N_*^+}v^i - \sum_{i\in N_*^-}v^i + \int_T(\eta(t) + \mu(t))dt\right)\Delta\alpha + \\ & \int_0^{t^*}\Bigg[-y'HF\left(t^*,t\right) - \sum_{i\in N}d'v_iF(\tau_i,t) - \sum_{i\in N_*}d'v^iF\left(\tau^i,t\right) + \\ & + \int_t^{t^*}d'F(\tau,t)\left(\mu(t) + \eta(t)\right)d\tau\Bigg]b\Delta u(t)\,dt + \sum_{i\in N^+}\Delta z_1(\tau_i)v_i + \sum_{i\in N^-}\Delta z_2(\tau_i)v_i +\end{aligned}$$
10)

$$+\sum_{i\in N_*^+}\Delta z_1\left(\tau^i\right)v^i+\sum_{i\in N_*^-}\Delta z_2\left(\tau^i\right)v^i-\int_T\mu(t)\,\Delta z_1(t)\,dt-\int_T\eta(t)\Delta z_2(t)dt.$$

Здесь $F(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x}=Ax$.

Обозначим:

$$\varphi'(t)=-y'HF\left(t^*,t\right)-\sum_{i\in N}d'v_iF\left(\tau_i,t\right)-\sum_{i\in N_*}d'v^iF\left(\tau^i,t\right)+$$

$$+\int_t^{t^*}d'F(\tau,t)\xi(t)\,dt,\qquad \xi(t)=\mu(t)+\eta(t),\quad t\in T. \qquad 11)$$

Функция $\varphi(t),\quad t\in T,$ (11) является решением уравнения

$$\dot{\varphi}=-A'\varphi-d\xi(t) \qquad 12)$$

с начальным условием

$$\varphi\left(t^*\right)=-H'y \qquad 13)$$

и условиями скачков

$$\varphi(\tau_i)=\varphi(\tau_i+0)-dv_i,\ i\in N;\quad \varphi\left(\tau^i\right)=\varphi\left(\tau^i+0\right)-dv^i,\ i\in N_*. \qquad 14)$$

С учётом (11) формула приращения критерия качества (10) приращение имеет вид:

$$\Delta J(\alpha,u)=\left(-1+\sum_{i\in N^+}v_i-\sum_{i\in N^-}v_i+\sum_{i\in N_*^+}v^i-\sum_{i\in N_*^-}v^i+\int_T\left|\xi(t)\right|dt\right)\Delta\alpha+$$

$$+\int_T\varphi'(t)b\Delta u(t)\,dt+\sum_{i\in N^+}\Delta z_1(\tau_i)v_i+\sum_{i\in N^-}\Delta z_2(\tau_i)v_i+ \qquad 15)$$

$$+\sum_{i\in N_*^+}\Delta z_1\left(\tau^i\right)v^i+\sum_{i\in N_*^-}\Delta z_2\left(\tau^i\right)v^i-\int_T\mu(t)\Delta z_1(t)\,dt-\int_T\eta(t)\Delta z_2(t)\,dt.$$

Формула (15) справедлива при любом выборе точек $\tau_i,\ i\in N;\quad \tau^i,\ i\in N_*;$ векторе y, чисел $v_i,\ i\in N;\quad v^i,\ i\in N_*;$ и кусочно-непрерывных функций $\mu(t),\ \eta(t),\ t\in T.$

3 Критерий оптимальности. Рассмотрим множества:

$$T_a=\left\{t\in T:\left|d'x(t)\right|=\alpha\right\}=\bigcup_{i\in N_a}T_{ai},$$

$$T_{ai}=\left[\tau_i,\tau^i\right],\quad \tau_i\le\tau^i<\tau_{i+1},\quad i\in N_a=\{1,\ldots,n_0\};$$

$$N_a^+=\left\{i\in N_a:\ d'x(t)-\alpha=0,\ t\in T_{ai}\right\},\quad N_a^-=N_a\setminus N_a^+, \qquad 16)$$

$$N_{a*}^+=\left\{i\in N_a^+:\tau_i<\tau^i\right\},\quad N_{a0}^+=N_a^+\setminus N_{a*}^+,\ N_{a*}^-=\left\{i\in N_a^i:\tau_i<\tau^i\right\},\quad N_{a0}^-=N_a^-\setminus N_{a*}^-,$$

$$N_{a*}=N_{a*}^+\cup N_{a*}^-,\quad N_{a0}=N_{a0}^+\cup N_{a0}^-,\quad T_{на}=T\setminus\bigcup_{i\in N_{a*}}T_{ai},$$

построенные по допустимой паре $(\alpha,u(\cdot))$ и соответствующей ей траектории.

Определение 4 Допустимая пара $(\alpha,u(\cdot))$ называется регулярной, если множество $T_{a*}=\left\{t\in T_a:\left|u(t)=1\right|\right\}$ состоит из конечного числа точек и $n_0<\infty$.

Если в системе (12) – (14) в качестве отрезков $T_i,\ i\in N$, взять отрезки T_{ai}, построенные согласно (16), тогда получим сопряженную систему вида

$$\dot{\varphi}=-A'\varphi-d\xi(t),\qquad \varphi\left(t^*\right)=-H'y,$$

$$\varphi(\tau_i)=\varphi(\tau_i+0)-dv_i,\ i\in N_a;\quad \varphi\left(\tau^i\right)=\varphi\left(\tau^i+0\right)-dv^i,\ i\in N_{a*}. \qquad 17)$$

Справедлива

Теорема 1. (**Критерий оптимальности**) Пусть в задаче (2) выполняется условие

Слейтера. Тогда для оптимальности регулярной пары $(\alpha, u(\cdot))$ в задаче (2) необходимо и достаточно существования таких кусочно-непрерывной функции $\xi(t),\ t \in T$, вектора $y \in R^m$ и чисел

$$\left(v_i,\ i \in N_a;\quad v^i,\ i \in N_{a*}\right),\quad \int_T |\xi(t)|dt + \sum_{i \in N_a} |v_i| + \sum_{i \in N_{a*}} |v^i| = 1,$$

что вдоль соответствующего им решения сопряжённой системы (17) и пары $(\alpha, u(\cdot))$ выполняются соотношения:

$$\varphi'(t)bu(t) = \max_{|u|\le 1} \varphi'(t)bu,\quad t \in T;$$
$$-\xi(t)d'x(t) = \max_{|\gamma|\le\alpha} -\xi(t)\gamma,\ t \in T;$$
$$v_i d'x(\tau_i) = \max_{|\gamma|\le\alpha} v_i\gamma,\quad i \in N;\qquad v^i d'x(\tau^i) = \max_{|\gamma|\le\alpha} v^i\gamma,\quad i \in N_* \tag{18}$$

Из соотношений (18) следует, что на регулярной оптимальной паре $(\alpha, u(\cdot))$ должны иметь места равенства:

$$\varphi'(t)b = 0,\ t \in T_{ai}, i \in N_{a*};\quad \xi(t) = 0,\ t \in T_{на} \tag{19}$$

Наряду с сопряжённой системой (12) – (14) рассмотрим систему

$$\dot\psi' = -\psi' A(t),\qquad \psi'(t^*) = -y'H,$$
$$\psi(\tau_i - 0) = \psi(\tau_i + 0) - d\bar v_i,\quad i \in N; \tag{20}$$

где

$$A(t) = A,\quad t \in T \setminus \bigcup_{i \in N_*} T_i,\quad A(t) = ZA,\quad t \in T_i,\ i \in N_*. \tag{21}$$

Сформулируем критерий оптимальности в терминах системы (20), где в качестве отрезков $T_i,\ i \in N$, взяты отрезки T_{ai}, постоянные согласно (16).

<u>Теорема 2.</u> Пусть ограничения задачи (2) удовлетворяют условиям типа Слейтера. Тогда для оптимальности регулярной пары $(\alpha, u(\cdot))$ в задаче (2) необходимо и достаточно существования такого вектора $v = (\bar v_i,\ i \in N_a;\ y)$, что вдоль соответствующего ему решения $\psi(\cdot)$ системы (20) и пары $(\alpha, u(\cdot))$ выполняются соотношения:

$$\sum_{i \in N_a} \bar v_i \ne 0;$$
$$\psi'(t)bu(t) = \max_{|u|\le 1} \psi'(t)bu,\quad t \in T_{на};$$
$$\frac{\psi'(\tau^i)b}{d'b}\begin{cases}\ge 0, & i \in N_{a*}^+,\\ \le 0, & i \in N_{a*}^-;\end{cases}\qquad \bar v_i - \frac{\psi'(\tau_i + 0)b}{d'b}\begin{cases}\ge 0, & i \in N_{a*}^+\\ \le 0, & i \in N_{a*}^-;\end{cases} \tag{22}$$
$$\frac{\psi'(t)A(t)b}{d'b}\begin{cases}\ge 0, & t \in T_{ai},\ i \in N_{a*}^+,\\ \le 0, & t \in T_{ai},\ i \in N_{a*}^-;\end{cases}\qquad \bar v_i\begin{cases}\ge 0, & i \in N_{a0}^+,\\ \le 0, & i \in N_{a0}^-.\end{cases}$$

Рассмотрим допустимую пару $(\alpha, u(\cdot))$ и соответствующие ей множества (16). Обозначим:

$$T_{н0} = \left\{ t \in T_{на} : |u(t-0) + u(t+0)|/2 < 1 \right\} = \left\{ t_j,\ j \in \bar J \right\},\quad \bar J = \{1, 2, ..., \bar p\}.$$

<u>Определение 5.</u> Регулярная пара $(\alpha, u(\cdot))$ называется невырожденной, если найдётся такое множество $J_* \subset \bar J$, что $\det P_{on} \ne 0$,

$$P_{on} = \begin{bmatrix} \underset{i \in N_a}{a_i}, & d'\Phi\left(\tau_i, t_j\right)b, \ j \in J_* \\ 0 & H\Phi\left(t^*, t_j\right)b, \ j \in J_* \end{bmatrix},$$

где $a_i = -1$ при $i \in N_a^+$; $a_i = 1$ при $i \in N_a^-$.

Здесь $\Phi(t, \tau)$, $t \geq \tau$, – фундаментальная матрица решений уравнений $\dot{x} = A(t)x$. Считаем, что $\Phi(t, \tau) \equiv 0$, при $t < \tau$.

Пусть $(\alpha, u(\cdot))$ – невырожденная пара. Подсчитаем вектор

$$\hat{v} = (\overline{v}_i, \ i \in N_a; \quad y) = -q_{(1)}, \tag{23}$$

где $-q_{(1)}$ первая строка матрицы $Q = P_{on}^{-1}$.

<u>Следствие 1.</u> Для оптимальности невырожденной пары в задаче (2) необходимо и достаточно, чтобы вдоль пары $(\alpha, u(\cdot))$ и решения $\psi(\cdot)$ системы (20), соответствующего вектору $\hat{v}$ (23) выполнялись соотношения (22).

Критерий оптимальности (22) носит конструктивный характер, т.к. при его формулировке не используются меры. Согласно теореме 2, исходная бесконечномерная проблема сводится к поиску конечного вектора скачков. С точки зрения разработки численных методов это имеет большое значение, т.к. позволяет использовать критерий оптимальности для построения эффективного алгоритма решения задачи (2).

Резюме. В статье приводится конструктивное построение критерия оптимальности для специальной задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Abstract. The optimality criterion construction for a special optimum control problem with phase restrictions is given in the article.

Литература

1 Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, С.Ф.Мищенко – М.: Наука, 1969. – 384 с.

2 Габасов, Р.Ф. Конструктивные методы оптимизации. Ч.2. Задачи управления / Р.Ф.Габасов, Ф.М.Кириллова – Мн.: Изд-во: «Университетское», 1984 – 205 с.

3 Костюкова, О.И. Конечный алгоритм оптимизации линейной динамической системы со смешанными ограничениями // О.И.Костюкова: Препринт. – Мн:. АН БССР, Институт математики, 1990. – 35 с.

4 Костюкова, О.И. Оптимизация линейных динамических систем с фазовыми ограничениями // О.И.Костюкова: Препринт. – Мн:. АН БССР, Институт математики, 1999. – 30 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 30.03.10