Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(62), 2010

УДК 512.542

О пересечениях максимальных подгрупп в конечных разрешимых группах

Л. М. Белоконь

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в [1].

Пусть G – неединичная разрешимая группа, и пусть $\mathfrak{F}$ – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$. Тогда, ввиду $F(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, очевидно, $\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \Delta_{\overline{F(G)}}(G)$, где $\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп группы G, не содержащих её $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$, а $\Delta_{\overline{F(G)}}(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп G, не содержащих её подгруппу Фитинга $F(G)$. В работе [2] установлено, что подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G совпадает с $\Delta_{\overline{F(G)}}(G)$, откуда следует, что $\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta_{\overline{F(G)}}(G)$.

Следующая теорема есть формационное обобщение теоремы, доказанной для случая $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ в работе [3].

Теорема. *Для всякой радикальной локальной формации* $\mathfrak{F}$*, содержащей класс всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$*, пересечение всех* $\mathfrak{F}$*-абнормальных максимальных подгрупп разрешимой не* $\mathfrak{F}$*-группы* G *совпадает с пересечением всех её* $\mathfrak{F}$*-абнормальных максимальных подгрупп, не содержащих её* $\mathfrak{F}$*-радикал* $G_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть G – разрешимая не $\mathfrak{F}$-группа, $\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-радикал группы G. Понятно, что $G \neq 1$ и, следовательно, ввиду сделанного замечания относительно результата из [2], $\Phi(G) = \Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Если все максимальные подгруппы группы G, не содержащие $G_{\mathfrak{F}}$, являются $\mathfrak{F}$-нормальными в G, то $\mathfrak{F}$-корадикал группы G содержится в $\Phi(G)$, что приводит к противоречию ввиду насыщенности формации $\mathfrak{F}$. Значит, в группе G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы, не содержащие $G_{\mathfrak{F}}$; обозначим через $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ пересечение всех таких подгрупп, и пусть $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп G. Предположим, что $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subset \Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Значит, существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G, содержащие $G_{\mathfrak{F}}$, обозначим пересечение всех таких подгрупп через $\Delta^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$. Подгруппы $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ и $\Delta^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ характеристические в G и $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Delta^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. Обозначая $H/\Phi(G) = (G/\Phi(G))_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, согласно следствию 4.2.1 из [1] получаем $H \in \mathfrak{F}$ и, значит, $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, $G_{\mathfrak{F}}/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, следовательно, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Итак, $(G/\Phi(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi(G)$. Легко видеть, что $\Delta^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G)) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G)$ и $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G/\Phi(G)) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi(G)$. Поэтому, предполагая утверждение теоремы справедливым для групп, порядки которых меньше $|G|$, в случае $\Phi(G) \neq 1$ получаем $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Значит, можно считать, что $\Phi(G)=1$. По теореме 8.6 из [1] имеем $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G)$. По сделанному предположению $A = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\ Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G) \neq 1$, и пусть $K\ /\ Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\ Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G)$ из A. Так как G разрешима, то $K\ /\ Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G) \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. По лемме 7.13 из [1] подгруппа $Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G)$ f-гиперцентральна в G, f – внутренний экран формации $\mathfrak{F}$. Значит, $G/C_G(P/L) \in f(P/L)$ для любого G-главного фактора P/L, $P \subseteq Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G)$. Из S_n - çàìêíóòîñò ти $\mathfrak{F}$ следует $K/\ C_K(P/\ L) \in f(P/\ L)$. Ввиду возможности уплотнения G - ãëàâíîãî f-центрального ряда группы $Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G)$ до K-главного f-центрального ряда приходим к выводу: $K \in \mathfrak{F}$. Значит, $K \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ и потому $K \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G) = Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G)$. Противоречие. Следовательно, $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Теорема доказана.

Abstract. In the note there is obtained a result on the intersection of maximal $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups in a finite soluble not $\mathfrak{F}$-group towards a radical local formation $\mathfrak{F}$.

Литература

1. Л.А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978, 272 с.
2. В.С. Монахов, Замечания о максимальных подгруппах конечных групп, Доклады НАН Беларуси, 47, №4 (2003), 31–33.
3. В.С. Монахов, Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп, Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, №6 (27) (2004), 81.

Могилёвский государственный
университет продовольствия

Поступило 24.04.10