Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(62), 2010

УДК 512.542

Конечные группы с ограничениями на порядки некоторых силовских подгрупп

В. С. Монахов, А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1–3]. В данной работе представлены результаты, связанные со строением конечной группы с ограничениями на порядки силовских подгрупп всей группы или ее подгрупп Шмидта, либо на порядки силовских подгрупп из факторов некоторого нормального ряда группы.

1 Разрешимые группы, небициклические силовские подгруппы которых имеют ограниченные порядки

В работе [4] установлено, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G. Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B. Группы с бициклическими силовскими подгруппами изучались в работе [5], где, в частности, доказано, что если у разрешимой группы G все силовские подгруппы бициклические, то $d(G) \leq 6$. Здесь $d(G)$ — производная длина группы G.

Идеи работ [4] и [5] нашли применение в исследовании разрешимых групп, небициклические силовские подгруппы которых имеют ограниченные порядки. В частности, они используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — разрешимая группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы либо бициклические, либо порядка p^3. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Производная длина группы G не превышает 6.*

2. *Если $p = 2$, то фактор-группа $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3. В частности, $l_2(G) \leq 2$. Если $p = 3$, то фактор-группа $G/O_{3',3}(G)$ либо $3'$-группа, либо изоморфна $SL(2,3)$. В частности, если силовская 3-подгруппа бициклическая, то $l_3(G) \leq 1$. Если $p > 3$, то $l_p(G) \leq 1$.*

3. *Пусть G — A_4-свободная группа. Тогда:*

3.1) *$l_p(G) \leq 1$ для любого $p \in \pi(G)$;*

3.2) *G — дисперсивная группа;*

3.3) *если каждое простое $q \in \pi(G)$ не делит p^2+p+1 для всех простых $p \in \pi(G)$, то G — дисперсивная по Оре группа;*

3.4) *производная длина группы G не превышает 5.*

4. *Пусть G — группа нечетного порядка. Тогда производная длина группы G не превышает 3.*

Напомним, что группа называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

Пример 1. Пусть S — экстраспециальная группа порядка 7^3 и $H = \langle a,\ b,\ c \mid a^2 = b^3 = c^4 = abc\rangle$ — группа порядка $2^4 \cdot 3$, силовская 2-подгруппа которой является группой кватернионов Q_{16} порядка 16. В системе компьютерной алгебры GAP [6] несложно построить группу $G = [S]H$, у которой $d(G) = 6$. Значит оценка производной длины в теореме 1 является точной.

Пример 2. Симметрическая группа степени 4 имеет 2-длину 2 и силовскую 2-подгруппу порядка 8. Группа $[E_{3^2}]SL(2,3)$ имеет 3-длину 2 и силовскую 3-подгруппу порядка 3^3. Значит, оценки 2- и 3-длины в теореме 1 точные.

Пример 3. Пусть E_{7^3} — элементарная абелева группа порядка 7^3, S — экстраспециальная группа порядка 27, Q_8 — группа кватернионов порядка 8. Полупрямое произведение $G=[E_{7^3}]([S]Q_8)$ является A_4-свободной группой порядка $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$, удовлетворяющей условию теоремы 1. Ее производная длина равна 5. Таким образом, оценка производной длины A_4-свободной группы является точной.

Если небициклические силовские подгруппы имеют произвольный порядок, то производная длина и p-длина группы ограничены сверху значениями функций, зависящими от этих порядков.

Теорема 2. *Пусть в разрешимой группе G порядок каждой небициклической силовской p-подгруппы не делится на p^{n+1}, $p \in \pi(G)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *$d(G) \le \rho(n)+\delta(n)+1$, где $\delta(n)=\max\{k \in \mathbb{N} \mid n \ge 2^k+2k-2\}$. Если все силовские p-подгруппы бициклические, то $d(G) \le 6$.*

2. *Если силовская p-подгруппа G_p бициклическая, то $l_2(G) \le 2$ при $p=2$, а $l_p(G) \le 1$ при $p>2$. Если G_p небициклическая и $|G_p|=p^{n_p}$, то $l_p(G) \le \delta(n_p)+1$.*

Здесь $\rho(n)$ — максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n,\mathbb{P})$ над полем $\mathbb{P}$, а $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Согласно теореме Цассенхауза [7] такая функция $\rho(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ существует и не зависит от поля $\mathbb{P}$. Значения $\rho(n)$ вычислены для всех n в работе ([8], теорема A_S). Подставляя эти значения вместо $\rho(n)$ в теорему 2, получаем следующие утверждения.

Следствие. *Пусть G — разрешимая группа, у которой порядок каждой небициклической силовской p-подгруппы не делится на p^{n+1}, $p \in \pi(G)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда:*

1) *если $3 \le n \le 6$, то $d(G) \le n+4$;*
2) *если $7 \le n \le 10$, то $d(G) \le n+3$;*
3) *если $n=11$, то $d(G) \le 13$;*
4) *если $12 \le n \le 17$, то $d(G) \le 14$;*
5) *если $18 \le n \le 21$, то $d(G) \le 15$;*
6) *если $22 \le n \le 25$, то $d(G) \le 16$;*
7) *если $26 \le n \le 33$, то $d(G) \le 17$;*
8) *если $34 \le n \le 39$, то $d(G) \le 18$;*
9) *если $40 \le n \le 65$, то $d(G) \le 19$;*
10) *если $n \ge 66$, то $d(G) \le 5\log_9(n-2)+\delta(n)+6,3$.*

2 Разрешимые группы с ограниченными порядками факторов ее нормального ряда

Пусть n и m — натуральные числа. Говорят, что n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m=2$ говорят, что n свободно от квадратов, а при $m=3$ — от кубов.

Если порядок группы G свободен от квадратов, то в G существует циклическая холлова подгруппа N такая, что G/N циклическая ([3], теорема IV.2.11). В частности, G сверхразрешима и ее производная длина не превосходит 2.

Группы порядков, свободных от кубов, могут быть неразрешимыми. В работе [9] перечислены все такие группы:

если G — неразрешимая группа порядка, свободного от кубов, то $G=A\times B$, где A — разрешимая подгруппа, $B \cong PSL(2,r)$, r — простое число, $r \equiv \pm 3 \pmod 8$ и числа $r-1$ и $r+1$ свободны от кубов.

Для разрешимой группы G порядка, свободного от кубов, в работе [9] доказаны следующие утверждения:

производная длина G не превышает 3;

G — дисперсивная группа;

$\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре;

$2'$-холлова подгруппа метабелева;

если G не дисперсивна по Оре, то существует нормальная подгруппа N такая, что G/N изоморфна знакопеременной группе A_4.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Вполне естественно возникает следующая задача:

исследовать строение разрешимой группы с ограниченными порядками факторов ее нормального ряда.

Несложно проверить, что если у группы G имеется нормальный ряд, факторы которого имеют порядки, свободные от квадратов, то G сверхразрешима. В частности, G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен и производная длина $G/\Phi(G)$ не выше 2. В случае, когда факторы имеют порядки, свободные от кубов, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина G не превышает 4, а производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

2. *Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что G/N сверхразрешима.*

3. *$l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$.*

4. *Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3\}'$-холлову подгруппу.*

5. *Если G A_4-свободна, то:*

5.1) *$l_p(G) \leq 1$ для любого простого p;*

5.2) *производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3;*

5.3) *G дисперсивна по Оре.*

6. *Если G имеет нечетный порядок, то коммутант G нильпотентен. В частности, $G/\Phi(G)$ метабелева.*

Следующие примеры показывают, что все оценки из теоремы 3 являются точными.

Пример 4. Пусть S — экстраспециальная группа порядка 27. Ее группой автоморфизмов является группа $[E_{3^2}]GL(2,3)$ [6]. Полупрямое произведение $G = [S]GL(2,3)$ является группой порядка $2^4 3^3$ с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ порядка 3. Производная длина G равна 6, а производная длина $G/\Phi(G)$ равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset Z_3 \subset S \subset [S]Z_2 \subset [S]Q_8 \subset [S]SL(2,3) \subset G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$Z_3,\ S/Z_3 \simeq E_{3^2},\ ([S]Z_2)/S \simeq Z_2,\ ([S]Q_8)/([S]Z_2) \simeq E_{2^2},$$

$$([S]SL(2,3))/([S]Q_8) \simeq Z_3,\ G/([S]SL(2,3)) \simeq Z_2.$$

Кроме того, 2-длина и 3-длина данной группы равна 2.

Пример 5. Пусть E_{5^2} — элементарная абелева группа порядка 5^2. Её группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,5)$, в которой имеется подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Полупрямое произведение $G = [E_{5^2}]S_3$ является A_4-свободной группой с единичной подгруппой Фраттини. Производная длина группы G равна 3. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{5^2} \subset [E_{5^2}]Z_3 \subset [E_{5^2}]S_3 = G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$E_{5^2},\ ([E_{5^2}]Z_3)/(E_{5^2}) \simeq Z_3,\ ([E_{5^2}]S_3)/([E_{5^2}]Z_3) \simeq Z_2.$$

Кроме того, группа G является дисперсивной по Оре, а p-длина данной группы равна 1 для произвольного $p \in \{2,3,5\}$.

3 Группы, все подгруппы Шмидта которых имеют нормальные силовские подгруппы порядка свободного от четвертых степеней

В 1924 году О. Ю. Шмидт [10] исследовал строение конечной ненильпотентной группы, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Такие группы впоследствии стали называть группами Шмидта или минимальными ненильпотентными группами. В дальнейшем $S_{<p,q>}$-группой будем называть группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Для $S_{<p,q>}$-группы S будем использовать запись $S = [P]Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, а Q — циклическая ненормальная силовская q-подгруппа.

Подробный обзор результатов о группах Шмидта и их приложениях в теории конечных групп имеется в [11]. Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами конечных групп.

В работе [12] исследовано строение группы, у которой все подгруппы Шмидта сверхразрешимы. Отсюда следует строение групп, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от квадратов. В работе [13] описаны группы с подгруппами Шмидта порядков, свободных от кубов.

Теорема 4. *В группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядка, свободного от четвертых степеней, тогда и только тогда, когда для каждой пары простых чисел $\{s,r\} \neq \{3,2\}$ из $\pi(G)$ таких, что $s > r$ и s не делит r^2+r+1, любая $\{s,r\}$-подгруппа группы G является s-замкнутой. Кроме того, если r не делит $(s+1)(s^3-1)$, то любая $\{s,r\}$-подгруппа группы G нильпотентна.*

Теорема 5. *Пусть в группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядка, свободного от четвертых степеней. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Множество подгрупп Шмидта в группе G исчерпывается следующими подгруппами:*

1.1) *$S_{<p,q>}$-подгруппами $[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, $i \in \mathbb{N}$;*

1.2) *$S_{<p,q>}$-подгруппами $[E_{p^2}]Z_{q^i}$, $[[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}$, $[T]Z_{3^i}$, где q делит $p+1$, $q > 2$, $i \in \mathbb{N}$, и T — группа кватернионов порядка 8;*

1.3) *$S_{<p,q>}$-подгруппами $[E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1, $i \in \mathbb{N}$.*

2. *Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.1) и 1.2), когда:*

2.1) *группа G 2-замкнута и 3-замкнута;*

2.2) *для любых простых $s > r > 3$ из $\pi(G)$ таких, что r делит $s^2 - 1$, $\{s, r\}$-холлова подгруппа r-замкнута.*

3. *Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.1) и 1.3), когда:*

3.1) *группа G 2-замкнута;*

3.2) *$3'$- и $2'$-холловы подгруппы дисперсивны по Оре;*

3.3) *$\{s, r\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $s > r > 2$ из $\pi(G)$ таких, что r не делит $s + 1$.*

4. *Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.2) и 1.3), когда:*

4.1) *группа G дисперсивна по Оре;*

4.2) *$\{s, r\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $s > r$ из $\pi(G)$ таких, что r не делит $s - 1$.*

Резюме. В данной работе представлены результаты, связанные со строением конечной группы с ограничениями на порядок силовских подгрупп всей группы или ее подгрупп Шмидта, либо на порядок силовских подгрупп факторов некоторого нормального ряда.

Abstract. Let G be a finite group. We present the results about a structure of G with restrictions on the order of Sylow subgroups of G or Schmidt subgroups of G, or on the order of Sylow subgroups from factors of some normal series of G.

Литература

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука, 1978.

2. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.

3. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

4. Монахов, В. С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43, № 4. — С. 411–424.

5. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 4. — С. 603–612.

6. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4; 2009. (http://www.gap-system.org)

7. Zassenhaus, H. Beweis eines Zatzes uber diskrete Gruppen / H. Zassenhaus // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1938. — Bd 12. — S. 289–312.

8. Newman, M. F. The Soluble Length of Soluble Linear Groups / M.F. Newman // Math. Z. — 1972. — V. 126. — P. 59–70.

9. Монахов, В. С. Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. — 2008. — Т. 47, № 2. — С. 139–145.

10. Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем сб. — 1924. — Т. 31. — С. 366–372.

11. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса. — 2002. — С. 81–90.

12. Монахов, В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. заметки. — 1995. — Т. 58, № 5. — С. 717–722.

13. Монахов, В. С. Конечные группы, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от кубов / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Вестник Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина. Серия естественных наук. — Т. 31, № 2. — 2008. — С. 19–23.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 08.06.10