Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №3(54), Ч1, 2009

УДК 512.567.5

Описание регулярных фильтрующих подгрупповых функторов

Ю. В. Кравченко

Функции, согласованные с изоморфизмами групп и выделяющие в группах некоторые системы подгрупп, впервые были рассмотрены в работах А.Г.Куроша [1] и С.Амицура [2, 3]. С выходом работ Бэра [4] и Б.И.Плоткина [5] такие теоретико-групповые функции (подгрупповые функторы) стали изучаться как самостоятельные объекты.

Характерной особенностью подгрупповых функторов является их тесная связь с формациями, классами Фиттинга и классами Шунка. Основополагающими работами в этом направлении являются монографии А.Н.Скибы [6], С.Ф.Каморникова и М.В.Селькина [7]. Следует отметить, что эти две монографии показали, что функторные методы исследования носят универсальный характер и могут быть применены к изучению свойств абстрактных классов алгебраических систем.

Цель данной работы — в классе n-арных групп, содержащих по крайней мере одну единицу, дать описание всех регулярных τ-фильтрующих подгрупповых функторов.

Используются определения и обозначения, принятые в [7–9]. Напомним некоторые из них.

Универсальную алгебру A сигнатуры $\{\omega_n\}$, где $n \geq 2$, называют n-арной группой если: 1) операция ω_n ассоциативна на множестве A; 2) для любых элементов $a_1, ..., a_{n-1}, a \in A$ каждое из уравнений $(x, a_1^{n-1})\omega_n = a$ и $(a_1^{n-1}, y)\omega_n = a$ разрешимо относительно x и y в A.

Подгруппу H n-арной группы A называют инвариантной в A, если для любого $a \in A$ выполняется равенство

$$(a, H, a_1^{n-2})\omega_n = H,$$

где (a_1^{n-2}) — последовательность элементов из A, обратная к элементу a.

Последовательность (e_1^{n-1}) элементов полиадического мультикольца A называется нейтральной, если для любого $u \in A$

$$(u, e_1^{n-1})\omega_n = (e_1^{n-1}, u)\omega_n = u.$$

Последовательность (b_1^j) элементов n-арной группы A называется обратной для последовательности (a_1^i), если (a_1^i, b_1^j) — нейтральная последовательность. Будем обозначать $(b_1^j) = \left(a_1^j\right)^{-1}$. Заметим, что так как $(x, a_1, ..., a_i, a_i^{-1}, ..., a_1^{-1})\omega_n = x$, то последовательность $(a_i^{-1}, ..., a_1^{-1})$ является обратной к последовательности (a_1^i), то есть $(a_i^{-1}, ..., a_1^{-1}) = (a_1^i)^{-1}$.

Элемент ε n-арной группы A называется единицей, если выполняется следующее условие:

$$(\overset{j-1}{\varepsilon}, x, \overset{n-j}{\varepsilon})\omega_n = x,$$

где $x \in A, j \in \{1, ..., n\}$.

Обозначим $(H, \overset{n-1}{K})\omega_n = HK.$

Рассматриваются только конечные n-арные группы, содержащие не менее одной единицы.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех n-арных групп, содержащих по крайней мере одну единицу. В каждой n-арной группе из $\mathfrak{F}$ зафиксируем одну единицу. В дальнейшем под словами "подгруппа n-арной группы" будем понимать ту её подгруппу, которая содержит фиксированную единицу.

Замечание 1. *Фиксирование в n-арной группе G единичного элемента означает, что сигнатура n-арной группы* $\Omega = \{\omega_n, \ \varepsilon\}$, *где* ω_n – *n-арная операция на G,* ε – *нульарная операция на G, выделяющая этот фиксированный единичный элемент, который в дальнейшем будем отождествлять с нульарной операцией, выделяющей его.*

Замечание 2. *Так как для n-арных групп (n > 2), содержащих по крайней мере одну единицу, выполняется аналоги теорем Шрайера и Жордана-Гёльдера [10], то приведённые ниже рассуждения не зависят от того, какую единицу мы фиксируем в каждой n-арной группе.*

Замечание 3. *Пусть G – n-арная группа, N и K – такие её инвариантные подгруппы, которые являются смежными классами по одной и той же конгруэнции* α. *Тогда* $G/N \cong G/K \cong G/\alpha$, *причём N и K являются единицами n-арных групп G/N и G/K соответственно. Очевидно, что всегда существует автоморфное отображение* φ: $G \to G$ *такое, что* $\varphi(N) = K$. *Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, будем считать (с точностью до изоморфизма), что если в n-арной группе G зафиксирована единица* ε, α – *конгруэнция n-арной группы G, то фиксированной единицей в* G/α *будет* $N = [\varepsilon]_\alpha$.

Определение. Отображение φ: $A \to B$ n-арных групп A и B будем называть точным (точечноточным), если выполняются равенства $\varphi(a) = b$, $\varphi^{-1}(b) = a$, где a и b – фиксированные единицы из A и B соответственно.

В частности, если φ – точное автоморфное отображение n-арной группы G в себя, то $\varphi(a) = a$, где a – фиксированная единица в G. В терминологии книги [11] это означает, что точное автоморфное отображение имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Замечание 4. *Если* $\mathfrak{F}$ – *класс всех бинарных групп, то понятие точного изоморфизма совпадает с понятием изоморфизма бинарных групп (в общепринятом смысле).*

Замечание 5. *Если* $\mathfrak{F}$ – *класс всех n-арных групп (n > 2), содержащих только одну единицу, то все изоморфизмы являются точными.*

Определение. *Пусть* τ – *функция, которая ставит в соответствие каждой n-арной группе G некоторую непустую систему её подгрупп* $\tau(G)$, *каждая из которых содержит фиксированную единицу. Будем говорить, что* τ – *подгрупповой функтор, если* $(\tau(G))^{\varphi} = \tau(G^{\varphi})$ *для любого точного изоморфизма* φ *каждой n-арной группы G.*

Через $S_n(G)$ обозначим множество всех инвариантных подгрупп n-арной группы G, а через $sn(\mathrm{G})$ – множество всех субинвариантных (субнормальных) подгрупп n-арной группы G.

Множество $\mathcal{G}$ называется идеалом решетки $\mathcal{H}$, если выполняются следующие условия:

1) если $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{H}$, $B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{G}$;

2) если $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{G}$, то $<A,B> \in \mathcal{G}$.

Множество G называется фильтром решетки H, если выполняются следующие условия:

1) если $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{H}$, $A \subseteq B$;

2) если $A \in G$, $B \in G$, то $< A, B > \in G$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс n-арных групп и пусть θ и τ — подгрупповые $\mathfrak{X}$-функторы. Обозначим множество $\{G \in \mathfrak{X} \mid \theta(G) = \tau(G)\}$ через $\mathfrak{X}_\tau(\theta)$ и будем называть его классом, индуцированным $\mathfrak{X}$-функтором θ с помощью $\mathfrak{X}$-функтора τ.

Подгрупповой функтор τ называется эпиморфным, если для любого точного эпиморфизма n-арных групп $\varphi : A \to B$ справедливо равенство

$$(\tau(A))^{\varphi} = \tau(B).$$

Эпиморфный подгрупповой функтор θ будем называть регулярным, если для любого точного эпиморфизма n-арных групп $\varphi : A \to B$ выполняется включение

$$(\tau(B))^{\varphi^{-1}} = \tau(A).$$

Подгрупповой функтор τ называется решеточным, если для любой n-арной группы G всегда из H, $K \in \tau(G)$ следует $H \cap K \in \tau(G)$ и $<H,K> \in \tau(G)$. Таким образом, решеточный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор выделяет в каждой n-арной группе некоторую её решетку подгрупп $\tau(G)$.

Пусть τ — решеточный подгрупповой функтор. Подгрупповой функтор θ называется τ-фильтрующим функтором, если для любой n-арной группы G множество $\theta(G)$ является фильтром решетки $\tau(G)$. Подгрупповой функтор θ называется τ-идеальным функтором, если для любой n-арной группы G множество $\theta(G)$ является идеалом решетки $\tau(G)$.

Лемма 1. *Пусть τ — такой регулярный решеточный подгрупповой функтор, что $S_n(G) \subseteq \tau(G)$ для любой n-арной группы G. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация n-арных групп и пусть τ — функция, которая ставит в соответствие каждой n-арной группе G систему подгрупп*

$$\theta(G) = \{H \mid H \in \tau(G),\ G^{\mathfrak{F}} \subseteq H\}.$$

Тогда θ — регулярный τ-фильтрующий подгрупповой функтор.

Доказательство.

1) Пусть φ — некоторый точный изоморфизм n-арной группы $G \in \mathfrak{X}$. Тогда

$$(\theta(G))^{\varphi} = \{H^{\varphi} \mid H^{\varphi} \in (\tau(G))^{\varphi}, (G^{\varphi})^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\varphi}\} =$$
$$\{H^{\varphi} \mid H^{\varphi} \in \tau(G^{\varphi}), (G^{\varphi})^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\varphi}\} = \theta(G^{\varphi}).$$

Итак, θ — подгрупповой функтор.

2) Пусть $\psi : A \to B$ — некоторый точный эпиморфизм n-арных групп A и B.

$$(\theta(B))^{\psi^{-1}} = \{S^{\psi^{-1}} \mid S^{\psi^{-1}} \in (\tau(B))^{\psi^{-1}}, (B^{\mathfrak{F}})^{\psi^{-1}} \subseteq S^{\psi^{-1}}\} =$$
$$\{S^{\psi^{-1}} \mid S^{\psi^{-1}} \in (\tau(B))^{\psi^{-1}}, (B^{\mathfrak{F}})^{\psi^{-1}} = (B^{\psi^{-1}})^{\mathfrak{F}} \subseteq S^{\psi^{-1}}\}$$

Заметим, что $K = S^{\psi^{-1}} \subseteq A, B^{\psi^{-1}} = A$. Кроме того, так как τ — регулярный подгрупповой функтор, то $(\tau(B))^{\psi^{-1}} \subseteq \tau(A)$. Поэтому:

$$(\theta(B))^{\psi^{-1}} \subseteq \{K \mid K \in \tau(A), A^{\mathfrak{F}} \in K\} = \theta(A).$$

Итак, θ — регулярный подгрупповой функтор.

3) Докажем, что $\theta(G)$ — фильтр решетки $\tau(G)$.

Пусть $A \in \theta(G)$, $B \in \tau(G)$, $A \subseteq B$. Так как $A \in \theta(G)$, то $A \in \tau(G)$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq B$. Поэтому $B \in \theta(G)$.

Пусть $A \in \theta(G)$, $B \in \theta(G)$. Тогда $A \in \tau(G)$, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$ и $B \in \tau(G)$, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq B$. Следовательно, $A \cap B \in \tau(G)$ (так как τ — решеточный функтор) и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B$. Поэтому $A \cap B \in \theta(G)$.

Итак, θ — регулярный τ-фильтрующий подгрупповой функтор. Лемма доказана.

Для любой n-арной группы G и любой непустой формации n-арных групп $\mathfrak{F}$ рассмотрим множества

$$\theta_1(G) = \{H \mid H \in S_n(G),\ G^{\mathfrak{F}} \subseteq H\},$$
$$\theta_2(G) = \{H \mid H \in sn(G),\ G^{\mathfrak{F}} \subseteq H\}$$
$$\theta_3(G) = \{H \mid G^{\mathfrak{F}} \subseteq H\}$$

Согласно лемме 1 θ_1, θ_2, θ_3 — регулярные фильтрующие подгрупповые функторы.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф. Если подгрупповые $\mathfrak{X}$-функторы θ и τ являются эпиморфными, то класс n-арных групп $\mathfrak{X}_\tau(\theta)$ является гомоморфом.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{X}_\tau(G)$ Тогда по определению $G \in \mathfrak{X}$ и $\theta(G) = \tau(G)$. Пусть N — инвариантная подгруппа n-арной группы G. Так как $\mathfrak{X}$ — гомоморф, то $G/N \in \mathfrak{X}$. Кроме того, из определения эпиморфного функтора заключаем, что $\theta(G/N) = \theta(G)N/N$. Аналогично имеем, что $\tau(G/N) = \tau(G)N/N$. Теперь из равенства $\theta(G) = \tau(G)$ следует $\theta(G/N) = \tau(G/N)$, то есть $G/N \in \mathfrak{X}_\tau(\theta)$. Лемма доказана.

Следующая теорема показывает, что приведенными выше примерами функторов (то есть $\theta_1, \theta_2, \theta_3$) исчерпываются все регулярные τ-фильтрующие подгрупповые функторы.

Теорема. *Пусть τ — такой регулярный решеточный подгрупповой функтор, что*

$S_n(G) \subseteq \tau(G)$ для любой n-арной группы G. Тогда для любого регулярного τ-фильтрующего функтора θ справедливы следующие утверждения:

1) класс $\mathfrak{X}_\tau(\theta) = \{G \mid \theta(G) = \tau(G)\}$ является формацией n-арных групп;

2) для любой n-арной группы G имеет место равенство

$$\theta(G) = \{H \mid H \in \tau(G),\ G^{\mathfrak{X}_\tau(\theta)} \subseteq H\}.$$

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\tau(\theta)$. Согласно лемме 2 класс $\mathfrak{X}_\tau(\theta)$ является гомоморфом. Пусть A и B — инвариантные подгруппы n-арной группы G, причем $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$. Из определения регулярного функтора и условия $S_n(G) \subseteq \tau(G)$ следует, что $A \in \theta(G)$ и $B \in \theta(G)$. Так как $\theta(G)$ — фильтр решетки $\tau(G)$, то $A \cap B \in \theta(G)$, а значит, все τ-подгруппы n-арной группы G, содержащие $A \cap B$, входят в $\theta(G)$. Отсюда следует, в частности, что $\theta(G/A \cap B) = \tau(G/A \cap B)$. Значит, $G/A \cap B \in \mathfrak{F}$ то есть класс $\mathfrak{F}$ является формацией.

2) Пусть $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал n-арной группы G. Тогда $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}_\tau(\theta)$. Из определения класса $\mathfrak{X}_\tau(\theta)$ следует, что все τ-подгруппы n-арной группы $G/G^{\mathfrak{F}}$ входят в $\theta(G/G^{\mathfrak{F}})$. Из определения регулярного функтора заключаем, что $\theta(G) = \{H \mid H \in \tau(G),\ G^{\mathfrak{F}} \subseteq H\}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть τ — такой регулярный решеточный подгрупповой функтор, что $S_n(G) \subseteq \tau(G)$ для любой подгруппы n-арной группы G. Тогда отображение*

$$f\colon \theta \to \mathfrak{X}_\tau(\theta),$$

ставящее в соответствие каждому регулярному τ-фильтрующему функтору θ класс $\mathfrak{X}_\tau(\theta)$, является биекцией множества всех регулярных τ-фильтрующих подгрупповых функторов на множество всех непустых формаций n-арных групп.

Доказательство. Инъективность отображения f следует из утверждения 1) теоремы 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Положим

$$\theta(G) = \{H \mid H \in \tau(G),\ G^{\mathfrak{F}} \subseteq H\}.$$

Тогда на основании свойств функтора τ имеем $\mathfrak{X}_\tau(\theta) = \mathfrak{F}$, то есть $f(\theta) = \mathfrak{X}_\tau(\theta)$. Значит, f сюрьективно.

Если $\tau(G) = S_n(G)$ то из теоремы вытекает

Следствие 2. *Пусть θ — регулярный S_n-фильтрующий функтор. Тогда:*

1) класс $\mathfrak{F} = \{G \mid \theta(G) = S_n(G)\}$ является формацией;

2) для любой n-арной группы G имеет место равенство

$$\theta(G) = \{H \mid H \lhd G,\ G^{\mathfrak{F}} \subseteq H\}.$$

Следствие 3. *Отображение, ставящее в соответствие каждому регулярному S_n-фильтрующему подгрупповому функтору θ класс*

$$\{G \mid \theta(G) = S_n(G)\},$$

является биекцией множества всех регулярных S_n-фильтрующих функторов на множество всех непустых формаций n-арных групп.

Если $\tau(G) = sn(G)$, то из теоремы вытекает

Следствие 4. *Пусть θ — регулярный sn-фильтрующий подгрупповой функтор. Тогда:*

1) класс $\mathfrak{F} = \{G \mid \theta(G) = sn(G)\}$ является формацией n-арных групп;

2) для любой n-арной группы G имеет место равенство

$$\theta(G) = \{H \mid H \in sn(G),\ G^{\mathfrak{F}} \subseteq H\}.$$

Следствие 5. *Отображение, ставящее в соответствие каждому регулярному sn-фильтрующему подгрупповому функтору θ класс $\{G \mid \theta(G) = sn(G)\}$ является биекцией множества всех регулярных sn-фильтрующих функторов на множество всех непустых формаций n-арных групп.*

Abstract. All the groups considered in the paper are n-ary groups. The author gives a description of regular filtered subgroup functors for n-ary groups.

Литература

1. Курош, А.Г. Радикалы колец и алгебр / А.Г.Курош // Матем. сб. – 1953. – Т.33. – С. 13–26.
2. Amitsur, S. A general theory of radicals / S.Amitsur // Amer. J. Math. – 1952. – V. 74. – P.774–786.
3. Amitsur, S. A general theory of radicals / S.Amitsur // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76. – P. 100–136.
4. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R.Baer // Amer. J. Math. – 1957. – V. 1. – P. 115–187.
5. Плоткин, Б.И. Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы / Б.И.Плоткин // Избранные вопросы алгебры и логики: Сборник, посвященный памяти А.И. Мальцева. – Новосибирск : Наука, 1973. С. 205-244.
6. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н.Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997.
7. Каморников, С.Ф., Селькин, М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф.Каморников, М.В.Селькин. – МН. : Бел. навука, 2003.
8. Шеметков, Л.А., Скиба, А.Н. Формации алгебраических систем / Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба. – М. : Наука, 1989.
9. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А.Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992.
10. Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М.Гальмак. – Мн. : Бел. навука, 1999.
11. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И.Мальцев. – М. : Наука, 1970.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 15.09.08