Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №3(60), 2010

Математика

УДК 517.9

Нахождение отражающей функции сильно вложимых дифференциальных систем

М. С. Белокурский

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = S(t,x)\,,\ t \in R\,,\ \ x^T = (x_1,...,x_n) \in R^n\,, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Отражающей функцией [1, с. 62] системы (1) называется функция, определяемая формулой

$$F(t,x) = \varphi(-t;t,x)\,,$$

где $\varphi(t;\tau,x)$ есть общее решение системы (1) в форме Коши. Для любого решения $x(t)$ этой системы верно тождество

$$F(t,x(t)) \overset{t}{\equiv} x(-t)\,. \tag{2}$$

Это свойство можно принять и за определение отражающей функции [2, с. 16]. Больше о методе отражающей функции и его применении можно найти в [1]-[5], а также на сайте www.reflecting-function.narod.ru.

Простейшим квазимногочленом называется комплекснозначная функция переменного t вида $t^k e^{\nu t}$, где $k \in N_0, \nu \in C$. Всякая линейная комбинация простейших квазимногочленов с комплексными коэффициентами называется квазимногочленом. Компонента x_i системы (1) называется вложимой [6, с. 47], если для любого решения $x(t) = (x_1(t),...,x_m(t))$ этой системы функция $x_i(t)$ является квазимногочленом (говоря о решениях системы, мы имеем в виду, что они действительны). Компонента x_i системы (1) вложима тогда и только тогда, когда для каждого решения $x(t)$ этой системы существует линейное стационарное уравнение вида $a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + ... + a_0 z = 0$, для которого $x_i(t)$ является решением. Когда компонента $x_i(t)$ любого решения $x(t)$ системы (1) является одновременно и решением некоторого общего для всех решений $x(t)$ линейного стационарного уравнения, то эта компонента называется сильно вложимой. Дифференциальная система называется вложимой (сильно вложимой) если любая ее компонента вложима (сильно вложима).

Как вложимые, так и сильно вложимые системы, как правило, являются существенно нелинейными системами. В частности, как показано в [6], они могут иметь несколько положений равновесия, предельные циклы и иметь другие качественные свойства, присущие только нелинейным системам.

С другой стороны, эти системы интегрируются в элементарных функциях. Правило нахождения решений задач Коши для этих систем см. в [6, с. 45]. Если нам удается найти отражающую функцию сильно вложимой системы, то мы можем построить целый класс дифференциальных систем с такой же отражающей функцией [1, с. 71]:

$$\dot{x} = -0.5F_x(-t,F)F_t + F_x(-t,F)R(t,x) - R(-t,F),$$

где $R(t,x)$ есть произвольная вектор-функция. Дифференциальные системы из этого класса не обязаны быть сильно вложимыми, однако они будут иметь те же качественные свойства, что и сильно вложимая система.

Пусть компонента x_i сильно вложима в уравнение

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_0 z = 0 \tag{3}$$

с действительными коэффициентами a_i, которое сводится к линейной однородной дифференциальной системе

$$\dot{z} = y_1, \dot{y}_1 = y_2, \ldots, \dot{y}_{n-1} = -a_{n-1}y_{n-1} - \ldots - a_0 z. \tag{4}$$

И пусть

$$\Phi(t,z,y_1,\ldots,y_{n-1}) = \begin{pmatrix} \Phi_0(t,z,y_1,\ldots,y_{n-1}) \\ \Phi_1(t,z,y_1,\ldots,y_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n-1}(t,z,y_1,\ldots,y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

– отражающая функция дифференциальной системы (4). Тогда справедлива

Теорема. *Пусть компонента x_i сильно вложима в уравнение (3), и пусть функция, $S_i(t,x_1,\ldots,x_m)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным до $n-2$ порядка включительно. Тогда i-ую компоненту отражающей функции*

$$F(t,x_1,\ldots,x_m) = \begin{pmatrix} F_1(t,x_1,\ldots,x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_i(t,x_1,\ldots,x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(t,x_1,\ldots,x_m) \end{pmatrix}$$

дифференциальной системы (1) можно найти по формуле

$$F_i(t,x_1,\ldots,x_m) = \Phi_0(t,x_i,S_i^{(1)}(t,x_1,\ldots,x_m),S_i^{(2)}(t,x_1,\ldots,x_m),\ldots,S_i^{(n-1)}(t,x_1,\ldots,x_m)), \tag{5}$$

где

$$S_i^{(1)} = S_i, S_i^{(2)} = \frac{\partial S_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial S_i}{\partial x_j}S_j, \ldots, S_i^{(n-1)} = \frac{\partial S_i^{(n-2)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial S_i^{(n-2)}}{\partial x_j}S_j$$

(т. е. мы последовательно находим производные в силу системы (1)).

Доказательство. Возьмем произвольное решение $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_i(t),\ldots,x_m(t))^T$ дифференциальной системы (1) и подставим его в формулу (5). Тогда получим

$$F_i(t, x_1(t), ..., x_m(t)) =$$
$$= \Phi_0(t, x_i(t), S_i^{(1)}(t, x_1(t), ..., x_m(t)), S_i^{(2)}(t, x_1(t), ..., x_m(t)), ..., S_i^{(n-1)}(t, x_1(t), ..., x_m(t)))$$

Так как

$$S_i^{(k)}(t, x_1(t), ..., x_m(t)) \equiv \frac{d^k x_i(t)}{dt^k},$$

где $k = \overline{0, n-1}$ [6, с.49], то

$$\Phi_0(t, x_i(t), S_i^{(1)}(t, x_1(t), ..., x_m(t)), S_i^{(2)}(t, x_1(t), ..., x_m(t)), ..., S_i^{(n-1)}(t, x_1(t), ..., x_m(t))) =$$
$$= \Phi_0(t, x_i(t), \dot{x}_i(t), \ddot{x}_i(t), ..., x_i^{(n-1)}(t)).$$

По условию компонента x_i сильно вложима и, следовательно, $x_i(t)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения (3). Тогда этому решению дифференциального уравнения (3) соответствует решение

$$(z(t), y_1(t), ..., y_{n-1}(t)) = (x_i(t), \dot{x}_i(t), ..., x_i^{(n-1)}(t))$$

дифференциальной системы (4). Поэтому

$$\Phi_0(t, x_i(t), \dot{x}_i(t), ..., x_i^{(n-1)}(t)) = \Phi_0(t, z(t), y_1(t), ..., y_{n-1}(t)) = z(-t) = x_i(-t).$$

С учетом того, что тождество (2) можно принять за определение отражающей функции, теорема доказана.

Замечание. Решение системы (4) представляет собой вектор-функцию, компонентами которой являются решения уравнения (3). Поэтому на практике нет необходимости сводить уравнение (3) к системе (4). Достаточно решить линейное однородное уравнение (3) и продифференцировать его необходимое количество раз. Для удобства можно писать $\dot{z}$ вместо y_1, $\ddot{z}$ вместо y_2 и так далее.

Применение этой теоремы проиллюстрирует следующий

Пример. Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = xy, \dot{y} = -y^2. \quad (6)$$

Ее первая компонента x сильно вложима в уравнение

$$\ddot{x} = 0. \quad (7)$$

Действительно, если взять производную в силу системы (6) от первого уравнения этой же системы, то мы и получим линейное однородное уравнение (7). Система (4) для нашего уравнения (7) принимает вид:

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = 0. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид $x = c_2 + c_1 t$, его производная $\dot{x} = c_1$. Совокупность этих двух равенств есть общее решение линейной однородной дифференциальной системы (8), к которой мы формально должны были свести уравнение (7). Первая компонента общего решения в форме Коши этой системы имеет вид

$$x = x_0 - \dot{x}_0 t_0 + \dot{x}_0 t\,.$$

Находим первую компоненту отражающей функции системы (8):

$$\Phi_0(t, x, \dot{x}) = x - \dot{x}t + \dot{x}\cdot(-t) = x - 2t\dot{x}\,.$$

И теперь по формуле (5) из теоремы найдем первую компоненту отражающей функции исходной системы (6):

$$F_1(t, x, y) = \Phi_0(t, x, xy) = x - 2txy\,.$$

Так как система (6) легко решается, то можно найти ее отражающую функцию непосредственно через общее решение и сравнить полученные результаты. Общее решение системы (6) в форме Коши:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 (t - t_0 + \dfrac{1}{y_0}) \\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{y_0} + t - t_0} \end{pmatrix}.$$

Тогда ее отражающая функция имеет вид:

$$\begin{pmatrix} F_1(t, x, y) \\ F_2(t, x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2txy \\ \dfrac{y}{1 - 2ty} \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты действительно совпадают.

Таким образом, если известно линейное стационарное уравнение, в которое сильно вложима одна из компонент данной нам системы, то найдя общее решение этого уравнения, мы всегда сможем построить одну или несколько компонент отражающей функции для сильно вложимой системы.

Резюме. Получен метод построения отражающей функции систем с сильно вложимой в смысле Мироненко В.И. компонентой. Другие системы могут иметь такую же отражающую функцию.

Abstract. The method of constructions of reflecting function for the systems with strong embeddable component in Mironenko sense is given. The other systems may have also the same reflecting function.

Литература

1. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем [Текст] / В.И. Мироненко. – Гомель: Мин. Образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 196 с.

2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений [Текст] / В.И. Мироненко. – Мн.: Университетское, 1986. – 76 с.

3. Мироненко, В.И. Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347-1352.

4. Mironenko, V.I. How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356-1359.

5. Musafirov, E.V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Jornal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63-76.

6. Мироненко, В.И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений [Текст] / В.И. Мироненко. – Мн.: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 104 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 10.04.10