

**ОСЕССИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГЛОЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ****А.В. Нестерович***Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***AXISYMMETRIC LOADING OF A CIRCULAR PHYSICALLY NONLINEAR THREE-LAYER PLATE IN ITS PLANE****A.V. Nestsiarovich***Belarusian State University of Transport, Gomel*

Исследованы перемещения в круглой физически нелинейной трехслойной пластине при осесимметричном термосиловом нагружении в своей плоскости. Для тонких несущих слоев используются соотношения теории малых упругопластических деформаций. Относительно толстый наполнитель является физически нелинейно упругим. Распределенная нагрузка зависит от радиальной координаты и приложена в срединной плоскости наполнителя. Приведены системы дифференциальных уравнений равновесия в усилиях и в перемещениях. Для решения краевой задачи предложен метод итераций, основанный на методе упругих решений Ильюшина. Проведена численная апробация полученного решения.

**Ключевые слова:** круглая трехслойная пластина, перемещения, осесимметричное растяжение-сжатие, пластичность.

The displacements in a circular physically nonlinear three-layer plate under axisymmetric thermal force loading in its plane are investigated. For thin bearing layers, the relations of the theory of small elastic-plastic deformations are used. A relatively thick filler is physically non-linearly elastic. The distributed load depends on the radial coordinate and is applied in the median plane of the filler. Systems of differential equations of equilibrium in forces and in displacements are given. To solve the boundary value problem, an iteration method based on the Ilyushin elastic solution method is proposed. The numerical approbation of the obtained solution is carried out.

**Keywords:** round three-layer plate, displacements, axisymmetric tension-compression, plasticity.

**Введение**

В настоящее время широко применяются композиционные элементы конструкций, в том числе трехслойные. К материалам их составляющих предъявляются требования по экономии, уменьшению веса элементов с сохранением требований по прочности и жесткости.

Деформированию трехслойных элементов конструкций посвящен ряд публикаций. В монографиях [1]–[3] приведены постановки краевых и начально-краевых задач и методы их решения. Колебания трехслойных пластин и оболочек рассмотрены в статьях [4]–[7]. Для вязкоупругопластических цилиндрических оболочек использованы наследственные соотношения теории малых упругопластических деформаций. Резонансные колебания трехслойных круговых пластин рассмотрены с учетом воздействия упругого основания [8], [9].

В работах [10]–[13] приводится деформирование трехслойных круговых и прямоугольных пластин со сжимаемым наполнителем. Определение несущей способности волокнистой трехслойной композитной кольцевой пластинки и неосесимметричная потеря устойчивости при осесимметричном нагреве круглой пластины рассматривается в статьях [14], [15]. В публикациях [16]–[19] приводятся исследования

напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек и слоистых пластин при изотермических и термосиловых квазистатических нагружениях.

Аналитические и численные результаты по осесимметричному деформированию трехслойных пластин, связанных с упругим двухпараметрическим основанием Пастернака приводятся в статьях [20]–[22]. Постановка и вывод уравнений равновесия круглых трехслойных пластин при осесимметричном и неосесимметричном линейном деформировании в своей плоскости опубликованы в статьях [23]–[29].

В предлагаемой работе приведена постановка и решение краевой задачи об осесимметричном термосиловом нагружении круглой физически нелинейной трехслойной пластины. Получены аналитические и численные результаты.

**1 Постановка краевой задачи**

Рассматривается симметричная по толщине круговая физически нелинейная трехслойная пластина радиусом  $r$ , состоящая из двух тонких несущих слоев толщиной  $h_1 = h_2$  и толстого несжимаемого наполнителя  $h_3 = 2c$ . Постановка задачи приводится в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , которая связывается со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1.1).

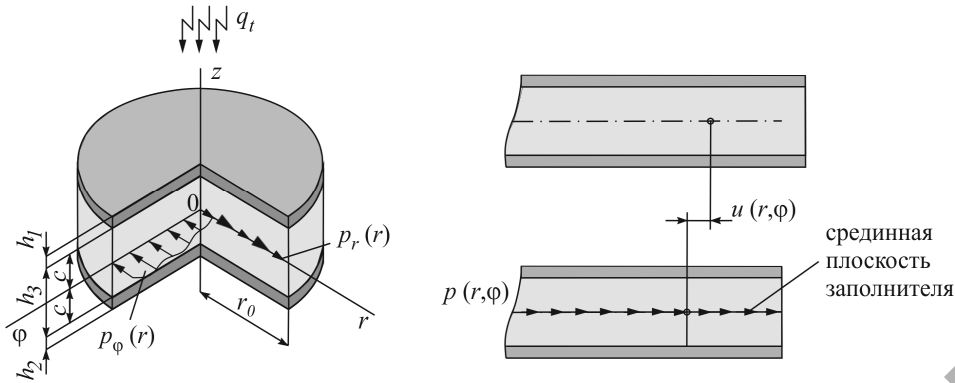


Рисунок 1.1 – Расчетная схема

К срединной плоскости приложена внешняя распределенная нагрузка, проекции которой на оси координат:  $p_r(r)$ ,  $p_\varphi(r)$ . Искомые радиальные и тангенциальные перемещения обозначаются через  $u_r(r)$ ,  $u_\varphi(r)$ . Принимается, что материалы несущих слоев могут проявлять упругопластические свойства, наполнитель – нелинейно упругий. Учтено воздействие однородного стационарного температурного поля  $T$ .

Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций [1]:

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k(T) \left(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)\right) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi),$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T) \left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)} \Delta T\right) \quad (1.1)$$

( $\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3$ ),

где  $s_{\alpha\beta}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$  – девиаторные части тензоров напряжений и деформаций;  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций;  $G_k(T)$ ,  $K_k(T)$  – модули сдвига и объемной деформации материала  $k$ -го слоя;  $\Delta T$  – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения  $T_0$ ;  $\alpha_0^{(k)}$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$  – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев ( $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T) = 0$  при  $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(T)$ ;  $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T)$  – универсальная функция физической нелинейности материала наполнителя ( $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T) = 0$  при  $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}(T)$ );  $\varepsilon_y^{(k)}$  – деформационный предел текучести материалов несущих слоев;  $\varepsilon_s^{(k)}$  – предел физической нелинейности материала наполнителя;  $\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{rr}^{(k)})^2 - \varepsilon_{rr}^{(k)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 3(\varepsilon_{r\varphi}^{(k)})^2}.$$

С помощью компонентов тензора напряжений (1.1) вводятся обобщенные внутренние силы в пластине [23]:

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^3 \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} h_k, \quad (1.2)$$

( $\alpha, \beta = r, \varphi$ ),

где  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений в  $k$ -ом слое.

Система дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных внутренних усилиях для упругой круглой трехслойной пластины следует из принципа Лагранжа [23]:

$$\begin{cases} T_{rr,r} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) = -p_r, \\ T_{r\varphi,r} + \frac{2}{r}T_{r\varphi} = -p_\varphi, \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $T_{\alpha\beta}^{(k)}$  – внутренние силовые факторы (1.2); запятая в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Выделим линейную (индекс «e»), нелинейную (индекс «o») и температурную (индекс «t») составляющие в компонентах тензора напряжений:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\alpha o}^{(k)} - \sigma_t^{(k)},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\beta o}^{(k)} \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3),$$

где слагаемые напряжений выражаются через деформации  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$

$$\sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} = \left(K_k(T) + \frac{4}{3}G_k(T)\right) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + \left(K_k(T) - \frac{2}{3}G_k(T)\right) \varepsilon_{\beta\beta}^{(k)},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha o}^{(k)} = 2G_k(T) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T) (\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}),$$

$$\sigma_{r\varphi e}^{(k)} = s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)},$$

$$\sigma_{r\varphi o}^{(k)} = 2G_k(T) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)},$$

$$\sigma_t^{(k)} = 3K_k(T) \alpha_0^{(k)} T.$$

Внутренние усилия в пластине (1.2) также представляются в виде суммы линейной, нелинейной и температурной частей:

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta o}^{(k)} - \delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= T_{\alpha\beta e} - T_{\alpha\beta\omega} - \delta_{\alpha\beta} T_t = \\
 &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} dz - \\
 &- 3\delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T) \Delta T dz.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  – символы Кронекера.

Подставив усилия (1.4) в уравнения (1.3), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях для круговой физически нелинейной трехслойной пластины при осесимметричном деформировании:

$$\begin{cases} T_{rre} r_r + \frac{1}{r} (T_{rre} - T_{r\phi e}) = -p_r + p_{r\omega}, \\ T_{r\phi e} r_r + \frac{2}{r} T_{r\phi e} = -p_\phi + p_{\phi\omega}. \end{cases} \tag{1.5}$$

В левой части уравнений (1.5), которая содержит линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, нижний индекс «e» в дальнейшем опустим для удобства. Переходя к безразмерной радиальной координате  $x = r/r_0$  систему (1.5) перепишем в виде

$$\begin{cases} T_{rr} r_x + \frac{1}{x} (T_{rr} - T_{r\phi}) = (-p_r + p_{r\omega}) r_0, \\ T_{r\phi} r_x + \frac{2}{x} T_{r\phi} = (-p_\phi + p_{\phi\omega}) r_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Нелинейные добавки (индекс « $\omega$ ») здесь вынесены вправо:

$$\begin{aligned}
 p_{r\omega} &= \frac{1}{r_0} \left( T_{rr\omega} r_x + \frac{1}{x} (T_{rr\omega} - T_{r\phi\omega}) \right), \\
 p_{\phi\omega} &= \frac{1}{r_0} \left( T_{r\phi\omega} r_x + \frac{2}{x} T_{r\phi\omega} \right).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Температурные составляющие в системе (1.6) отсутствуют, т. к. температура постоянна и производные от нее равны нулю, а в первом уравнении они взаимно сокращаются.

На контуре пластины  $x = 1$  должны выполняться силовые условия:

$$T_{rr} = T_{rr}^0 + T_{rr\omega}, \quad T_{r\phi} = T_{r\phi}^0 + T_{r\phi\omega}, \tag{1.8}$$

где  $T_{rr}^0, T_{r\phi}^0$  – заданные внешние контурные усилия.

Подставив во внутренние усилия в (1.6) напряжения (1.1) и выразив в них деформации через перемещения  $u_r(r), u_\phi(r)$  после некоторых преобразований, получим систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned}
 u_r r_{xx} + \frac{u_r r_x}{x} - \frac{u_r}{x^2} &= \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}), \\
 u_\phi r_{xx} + \frac{u_\phi r_x}{x} - \frac{u_\phi}{x^2} &= \frac{r_0^2}{a_2} (-p_\phi + p_{\phi\omega}),
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

где  $a_i$  – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left( K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) dz, \\
 a_2 &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T_k) dz.
 \end{aligned}$$

Заметим, температура здесь учитывается влиянием на величину модулей упругости материалов слоев.

Краевая задача для круговой физически нелинейной трехслойной пластины при осесимметричном нагружении замыкается добавлением к уравнениям (1.9) силовых (1.8) или кинематических граничных условий на контуре ( $x = 1$ ).

## 2 Решение краевой задачи при осесимметричной нагрузке

Система дифференциальных уравнений (1.9), описывающая деформирование круговой физически нелинейной трехслойной пластины при осесимметричном нагружении, является нелинейной. Получить ее аналитическое решение в конечном виде не представляется возможным. Поэтому для решения необходимо применять приближенные или численные методы. В дальнейшем используем метод последовательных приближений, базирующийся на методе упругих решений Ильюшина. Это позволяет на каждом шаге итерации решение задачи для физически нелинейной пластины сводить к решению краевой задачи для соответствующей упругой трехслойной пластины.

Уравнения (1.9) согласно методу упругих решений переписываем в итерационном виде:

$$\begin{aligned}
 u_r^{(n)} r_{xx} + \frac{u_r^{(n)} r_x}{x} - \frac{u_r^{(n)}}{x^2} &= \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}^{(n-1)}), \\
 u_\phi^{(n)} r_{xx} + \frac{u_\phi^{(n)} r_x}{x} - \frac{u_\phi^{(n)}}{x^2} &= \frac{r_0^2}{a_2} (-p_\phi + p_{\phi\omega}^{(n-1)}),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $n$  – номер приближения.

Дополнительные «внешние» нагрузки на первом шаге итерации принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения с помощью формул типа (1.7):

$$\begin{aligned}
 p_{r\omega}^{(n-1)} &= \frac{1}{r_0} \left( T_{rr\omega}^{(n-1)} r_x + \frac{1}{x} (T_{rr\omega}^{(n-1)} - T_{r\phi\omega}^{(n-1)}) \right), \\
 p_{\phi\omega}^{(n-1)} &= \frac{1}{r_0} \left( T_{r\phi\omega}^{(n-1)} r_x + \frac{2}{x} T_{r\phi\omega}^{(n-1)} \right),
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} - \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} = \\
 &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T_k) \Delta T_k dz = \\
 &= 2 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T_k) \omega_k \left( \varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k \right) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)(n-1)} dz -
 \end{aligned}$$

$$-3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T_k) \Delta T_k dz \quad (\alpha = r, \varphi),$$

$$T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} dz =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T_k) \omega_k \left( \varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k \right) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)(n-1)} dz.$$

Таким образом, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными  $p_{r\omega}^{(n-1)}$ ,  $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$  «внешними» нагрузками (2.2), вычисляемыми по результатам предыдущего приближения.

Решение системы (2.1) получено методом прямого интегрирования

$$u_r^{(n)} = C_1^{(n)} x - \frac{r_0^2}{a_1 x} \int_0^x \int_0^x (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) dx dx,$$

$$u_\varphi^{(n)} = C_3^{(n)} x - \frac{r_0^2}{a_2 x} \int_0^x \int_0^x (p_\varphi - p_{\varphi\omega}^{(n-1)}) dx dx. \quad (2.3)$$

Принимаем граничные условия закрепления контура пластины – жесткая заделка или шарнирное опирание. Тогда на контуре ( $x = 1$ ) должны выполняться условия

$$u_r(1) = 0, \quad u_\varphi(1) = 0. \quad (2.4)$$

После подстановки решения (2.3) в условия (2.4) получим константы интегрирования

$$C_1^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_1} \int_0^1 \int_0^1 (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) dx dx,$$

$$C_3^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_2} \int_0^1 \int_0^1 (p_\varphi - p_{\varphi\omega}^{(n-1)}) dx dx.$$

### 3 Численные результаты

Численная апробация решения (2.3) проведена для круглой трехслойной пластины единичного радиуса  $r = 1$  м при осесимметричном нагружении в срединной плоскости заполнителя нагрузкой постоянной интенсивности  $p_{r0} = 1000$  МПа,  $p_{\varphi0} = 0$  МПа, достаточной для проявления нелинейных свойств материалов слоев в полной мере. Температурное поле однородное  $T = \text{const}$ . Толщины слоев  $h_1 = h_2 = 0,02$  м,  $h_3 = 0,4$  м. Внешние несущие слои выполнены из дюралюминия Д16-Т, срединный слой – фторопласт-4. Упругие и физически нелинейные характеристики материалов заимствованы из [30].

На рисунке 3.1 проиллюстрирована практическая сходимость предложенного итерационного метода. Номер кривой соответствует номеру итерации. Здесь второе приближение радиального перемещения  $u_r(x)$  отличается от первого примерно на 10%. За искомое решение принято 5-е, которое отличается от предыдущего на 0,14%. Учет физически нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению расчетного прогиба на 14,7% по сравнению с упругой пластиной

(кривая 1). Тангенциальные перемещения в рассматриваемом случае отсутствуют.

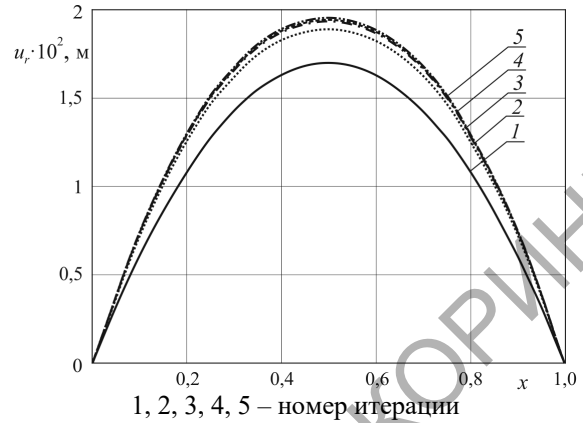


Рисунок 3.1 – Сходимость итерационного метода ( $T = 293$  К) (заделка контура)

На рисунке 3.2 показаны радиальные перемещения  $u_r(x)$  при различных температурах: 1 – упругая пластина ( $T = 293$  К); 2, 3, 4 – упругопластичная пластина при  $T = 293$  К, 373 К, 473 К соответственно. Перемещения достигают максимума в сечении  $x = 0,5$ . Расчетные перемещения увеличиваются за счет физической нелинейности материалов слоев на 14,7%. При нагревании пластины расчетные максимальные упругопластичские перемещения еще увеличиваются на 14,9% ( $T = 373$  К) и 27,7% ( $T = 473$  К).

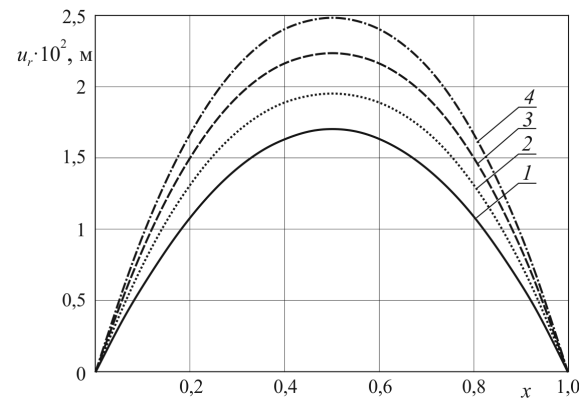


Рисунок 3.2 – Радиальные перемещения при различных температурах

На рисунке 3.3 приведены графики изменения вдоль радиуса пластины интенсивности деформаций  $\varepsilon_u$  при росте температуры: 1 – упругая пластина ( $T = 293$  К); 2, 3, 4 – упругопластичная пластина при  $T = 293$  К, 373 К, 473 К соответственно. Учет физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению расчетной интенсивности деформаций на 25,3%. С ростом температуры величина  $\varepsilon_u$  в упругопластической пластине возрастает еще на 13,2% ( $T = 373$  К) и на 24,3% ( $T = 473$  К). Горизонтальная

линия соответствует интенсивности деформаций равной пределу физической нелинейности для фторопласта-4  $\varepsilon_u = \varepsilon_s = 3,3\%$ .

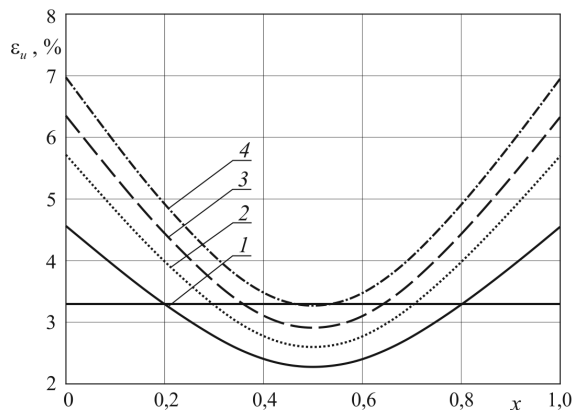


Рисунок 3.3 – Интенсивность деформаций  $\varepsilon_u$  при различных температурах

### Заключение

Следовательно, учет физической нелинейности материалов слоев приводит к существенному уточнению напряженно-деформированного состояния круговой трехслойной пластины при осесимметричном деформировании в своей плоскости. Приведенные результаты о деформировании сэндвич-пластин могут быть использованы при расчетах строительных конструкций, деформируемых в своей плоскости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
3. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Белорусская наука, 2017. – 275 с.
4. *The oblique impact response of composite sandwich plates* / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – № 133. – P. 1127–1136.
5. *Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading* / V.S. Deshpande, N.A. Fleck // J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71, № 5. – P. 637–645.
6. *Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell* / A.G. Gorshkov, É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 9. – P. 1196–1203.
7. *Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky //

Mechanics of Composite Materials. – Vol. 51, № 5. – P. 561–570.

8. Трацевская, Е.Ю. Динамическая неустойчивость квазитиксотропных моренных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. – 2017. – № 1 (46). – С. 107–111.

9. Трацевская, Е.Ю. Экспериментальное исследование характеристик пластичности неводонасыщенных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках [Электронный ресурс]. – 2018. – № 1. – Режим доступа: <http://mathmod.esrae.ru/17-62>. – Дата доступа: 05.07.2021.

10. Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

11. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.

12. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 98–104.

13. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 67–74.

14. Джагангиров, А.А. Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, защемленной по кромкам / А.А. Джагангиров // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 2. – С. 100–109.

15. *Неосесимметричная потеря устойчивости при осесимметричном нагреве круглой пластины* / Р.В. Гольдштейн [и др.] // Вестн. Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2 – С. 45–53.

16. Старовойтов, Э.И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

17. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

18. Julien, D. Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenesized Love–Kirchhoff Model / D. Julien, S. Karam // Journal of the

Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol. 56, № 2. – P. 561–580.

19. *Moskvitin, V.V.* Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates / V.V. Moskvitin, E.I. Starovoitov // Mechanics of Composite Materials. – 1985. – Vol. 21, № 3. – P. 267–273.

20. *Козел, А.Г.* Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.

21. *Козел, А.Г.* Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

22. *Козел, А.Г.* Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.

23. *Нестерович, А.В.* Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

24. *Нестерович, А.В.* Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

25. *Нестерович, А.В.* Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в

своей плоскости / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – 2020. – Вып. 35. – С. 266–272.

26. *Нестерович, А.В.* Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

27. *Нестерович, А.В.* Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2020. – Вып. 13. – С. 116–121.

28. *Старовойтов, Э.И.* Неосесимметричное деформирование свободно опертой трехслойной пластины в своей плоскости / Э.И. Старовойтов, А.В. Нестерович // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – № 1 (27). – С. 17–30.

29. *Старовойтов, Э.И.* Неосесимметричное деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости / Э.И. Старовойтов, А.В. Нестерович // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 38–45.

30. *Starovoitov, E.I.* Description of the thermomechanical properties of some structural materials / E.I. Starovoitov // Strength of materials. – 1988. – Vol. 20, № 4. – P. 426–431.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T20P-047).*

*Поступила в редакцию 07.07.2021.*